Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕХАНІКО–МАШИНОБУДІВНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра основ конструювання механізмів і машин

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

Конспект лекцій для студентів
вищих навчальних закладів

О.І. Додатко
О.С. Жовтяк
Т.С. Савельєва

Дніпропетровськ
НГУ

2008

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

У конспекти лекцій прийняти такі позначення й умовності:

Точки в просторі позначаються великими літерами латинського алфавіту або цифрами, наприклад: *A, B, C, D. . . 1, 2, 3, 4, 5, ...*

Горизонтальні проекції точок – малими літерами: *a, b, c, d*.

Фронтальні (вертикальні) проекції точок – літерами зі штрихом, наприклад: a', b', c', d'.

Профільні проекції точок – літерами з двома штрихами, наприклад: a'', b'', c'', d''.

Лінії позначаються малими літерами латинського алфавіту, наприклад: *a, b, c, m, n.*

Площини позначаються великими літерами латинського алфавіту, наприклад: *P, Q, S, T, H, V, W.*

Горизонталі, фронталі і кути нахилу прямих і площин позначаються таким чином:

h – горизонталь;

f – фронталь;

α, β, γ – кути нахилу.

Площини проекцій:

H – горизонтальна площина проекцій;

V – фронтальна площина проекцій;

W – профільна площина проекцій;

x, y, z – осі проекцій.

Графічні символи мають такі значення:

$//$ – паралельність;

$\perp$ – перпендикулярність;

$\cap$ – перетин;

$\cup$ – з’єднання;

$\cdot\!/$ – символ прямих, які схрещуються;

$\equiv$ – збіг, рівняння;

$=$ – результат дії;

$\subset, \in$ – належність (наприклад, вираз т. $A \in$ пл. P означає, що точка A належить площині P);

$\supset, \ni$ – включення (пл. $P \supset AB$ означає, що пл. P включає пряму AB).

ЛЕКЦІЯ №1-2.

Тема: Предмет нарисної геометрії і її основний метод. Центральне і паралельне проектування. Метод Г. Монжа. Проеціювання точки на дві і три площини проекцій. Координати точки.

Предметом нарисної геометрії є обоснование методів побудови зображень просторових форм на площини і способів рішення задач геометричного характеру по заданим зображенням цих форм.

Побудова зображення у нарисній геометрії базується на *методі проекцій* (від латинського слова *projicere* – кидати).

.

1.1 Центральні проекції

Представим соби у просторі площину *P* і точку S, яка не належить ций площини. Визмем довільно вибраную точку *A і* проведемо пряму через точки *A* і *S* пряму лінію до перетину її з площиною *P(* рис. 1.1, *а).*

Точка a_p, у якій пряма *AS* перетинається з площиною *P,* називається *центральною проекцією* точки *A*. Точка *A* називається *оригіналом,* точка *S – центром проекцій,* площина *P – площиною проекцій,* а пряма SAa_p – *проеціюючою прямою* або *проеціюючим променем.*

На рис. 1.1, *б* зображено криву лінію *ABC* і її центральну проекцію $a_p b_p c_p$ на площину *P*. Пучок променів, який виходить із центра *S* і проеціює криву лінію *ABC,* утворює *проеціюючий конус.* На основі цього центральні проекції називають ще *конічними.* Крива лінія $a_p b_p c_p$ є перетином проеціюючого конуса площиною проекцій *P*.

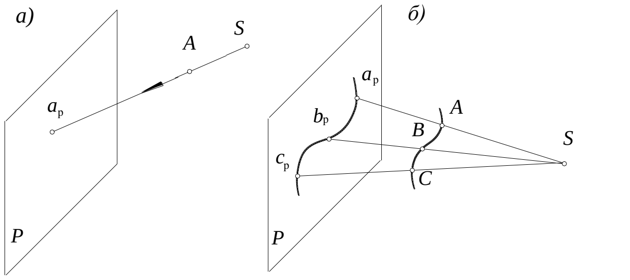


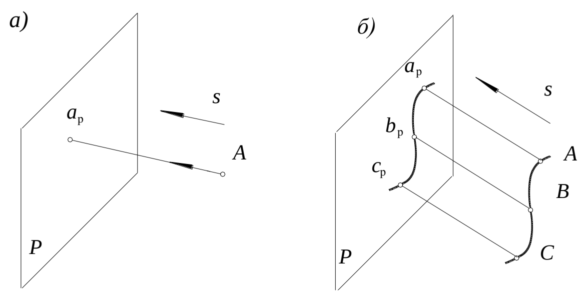
Рис. 1.1. Центральні проекції точки та кривої лінії

1.2. Паралельні проекції

Якщо центр проекцій *S* – нескінченно віддалена точка, то всі проеціюючі промені паралельні між собою. Для проведення цих променів треба задати напрямок проеціювання. Одержані таким шляхом зображення називаються *паралельними проекціями.*

На рис. 1.2, *а* показано побудову паралельної проекції a_p точки *A* на площину *P*. Пряма *s,* паралельно якій проведений проеціюючий промінь Aa_p, визначає *напрямок проеціювання.*

Паралельні промені, які проеціюють точки кривої лінії *ABC* (рис. 1.2, *б*), утворюють циліндричну поверхню, що дає підставу називати паралельні проекції також і *циліндричними.*



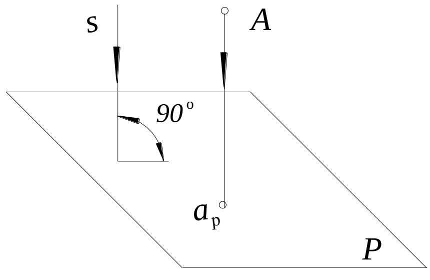


Рис. 1.2. Паралельні проекції точки та кривої лінії

Рис. 1.3. Прямокутне проеціювання

Напрямок проеціювання під час побудови паралельних проекцій може бути заданий під косим кутом до площини проекцій або перпендикулярно до неї. У першому випадку паралельне проеціювання називається *косокутним* (рис. 1.2, *б*), а у другому – *прямокутним* (рис. 1.3).

1.3. Ортогональні проекції

Сутність методу ортогональних проекцій проілюстрована на рис. 1.4, *а*. У просторі двогранного прямого кута, який утворений горизонтальною *H* і фронтальною *V* площинами проекцій, розміщена фігура, грані якої розташовані паралельно або перпендикулярно відповідній площині проекцій. Наприклад, верхня грань та інші паралельні їй грані розташовані паралельно горизонтальній площині проекцій *H*, у той же час вона перпендикулярна до фронтальної площини проекцій *V*. Спроеціюємо ортогонально фігуру на площини проекцій. З цією метою проведемо через її вершини проеціюючі промені, які є перпендикулярними до площин проекцій *H* і *V*. Точки перетину проеціюючих променів з площиною *H* визначають горизонтальні проекції фігури, а з площиною *V* – фронтальні проекції фігури. На рис. 1.4, *а* виділена вершина *A* та її проекції – горизонтальна *a* і фронтальна *a'*.

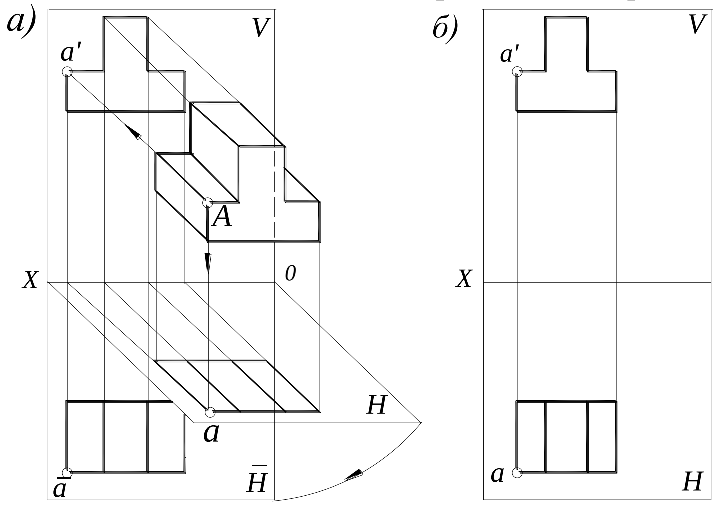


Рис. 1.4. Ортогональне проеціювання фігури

За проекціями фігури на площинах *H* і *V* можна уявити форму самої фігури. Для цього необхідно умовно провести дві групи променів, перпендикулярних відповідно до площин *H* і *V*, які проходять через горизонтальні та фронтальні проекції фігури. Тоді форму фігури і її розташування в межах двогранного кута, який утворений площинами *H* і *V*, можна виявити як наслідок перетину проеціюючих променів, що проходять через різнойменні проекції одних і тих же точок (наприклад, точку *A* одержимо на перетині променя, проведеного із точки *a* перпендикулярно до площини *H*, з променем, який проведений із точки *a'* перпендикулярно до площини *V*).

З рис. 1.4, *а* видно, що замість прямих кутів, які утворені при перетині ребер фігури, на горизонтальній площині проекцій вийшли гострі й тупі кути.

Для уникнення такого спотворення прямих кутів площину проекцій *H* разом з горизонтальною проекцією фігури обертають навколо прямої *0X*, яка утворена внаслідок перетину площин *H* і *V*. Приведемо площину *H* у суміщене з площиною *V* положення (напрямок обертання показаний стрілкою).

Суміщене положення площини *H* і горизонтальної проекції фігури з площиною *V* показано на рис. 1.4, *а*, причому суміщене положення проекції *a* позначено $\bar{a}$, а площина *H* позначена $\bar{H}$.

На суміщеній з площиною *V* горизонтальній проекції фігури спотворення прямих кутів немає.

На рис. 1.4, *б* зображено в суміщеному положенні площини *H* і *V* та ортогональні проекції фігури на цих площинах. Таке зображення фігури двома або декількома її ортогональними проекціями називається *комплексним кресленням.*

2.1. Точка та її проекції

Просторове зображення будь-якої фігури незручне для використання у виробництві, тому Г. Монж у 1789 році запропонував перейти від наочного зображення до комплексного креслення.

Комплексним кресленням (епюром) називають креслення, отримане унаслідок зміщення горизонтальної і профільної площин проекцій з фронтальною (вертикальною) площиною проекцій (рис. 1.5 і рис. 1.6).

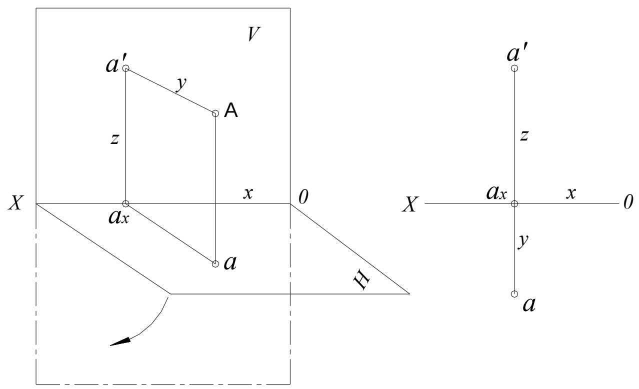


Рис. 1.5. Наочне зображення та епюр точки на двох площинах проекцій

При цьому прийнято такі позначення:

H − горизонтальна площина проекцій;

V − фронтальна площина проекцій;

W − профільна площина проекцій;

a − горизонтальна проекція точки *A*;

a' − фронтальна проекція точки *A*;

a'' − профільна проекція точки *A*.

Лінії, які з'єднують дві проекції точки, називають лініями проекційного зв'язку:

aa' − вертикальна лінія зв'язку;

a'a'' − горизонтальна лінія зв'язку.

Закон проеціювання

Дві проекції точки на комплексному кресленні завжди розташовані на одній лінії зв'язку, перпендикулярній до відповідної осі проекцій; зокрема:

1. Фронтальна і горизонтальна проекції точки завжди розташовані на одній вертикальній лінії зв'язку (рис. 1.5 і рис. 1.6, $a'a \perp ox$).

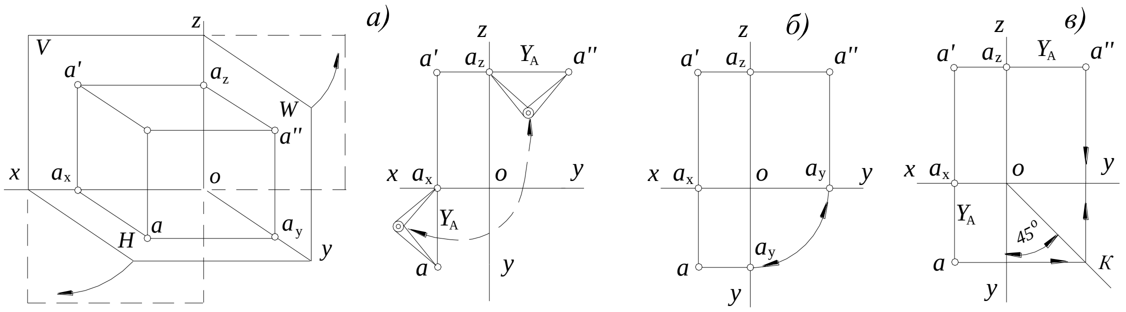


Рис. 1.6. Наочне зображення та епюр точки на трьох площинах проекцій

2. Фронтальна і профільна проекції точки завжди розташовані на горизонтальній лінії зв'язку (рис. 1.6 $a'a'' \perp oz$).

3. Відстань від точки до горизонтальної площини проекції визначається координатою *Z*; відстань до її фронтальної площини − координатою *Y*; до профільної площини проекції – координатою *X*.

4. Горизонтальну проекцію точки *a* визначають координати *X* і *Y*, фронтальну проекцію *a'* визначають координати *X* і *Z*, а профільну проекцію *a''* – *Y*, *Z*, тобто

a − XY; *a' − XZ;* *a'' − YZ.*

Третю проекцію точки за заданими двома проекціями можна побудувати такими способами:

собами: ***координатним*** (рис. 1.6, *а*), ***проекційним*** (рис. 1.6, *б*) і за допомогою ***постійної прямої креслення*** (рис. 1.6, *в*); зокрема:

1. Профільну проекцію точки за заданими горизонтальною і фронтальною проекціями будують таким чином: на горизонтальній лінії зв'язку, проведеній через фронтальну проекцію a', відкладають від осі OZ координатним способом значення координати Y ($a_x a = a_z a''$) (рис. 1.6, *а*) або будують її проекційним способом (рис. 1.6, *б*) чи за допомогою постійної прямої креслення (рис. 1.6, *в*).

2. Горизонтальну проекцію точки за заданими фронтальною і профільною проекціями будують таким чином: на вертикальній лінії зв'язку, проведеній через фронтальну проекцію a', відкладають від осі OX значення координати Y $(a_z a'' = a_x a)$ (рис. 1.6, *а*) або будують її проекційним способом (рис. 1.6, *б*) чи за допомогою постійної прямої креслення (рис. 1.6, *в*).

Дві взаємно перпендикулярні площини проекцій розділяють простір на чотири частини, які називаються **чвертями** (рис. 1.7); три площини – на вісім частин, які називаються **октантами** (рис. 1.8).

При суміщенні площин проекцій передня "пола" (півплощина) горизонтальної площини завжди переміщається вниз, задня – вгору, передня "пола" профільної площини – вправо, а задня – вліво.

На рис. 1.7 показано розташування точок у чвертях, а на рис. 1.8 – розташування октантів.

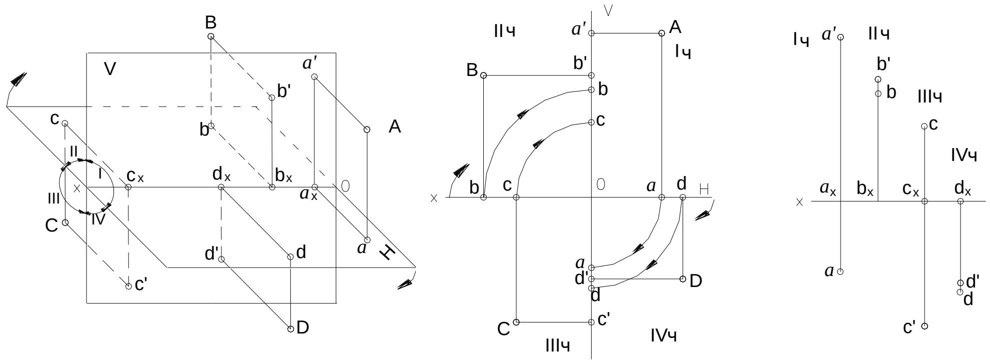


Рис. 1.7. Наочне зображення і епюр точок у чвертях

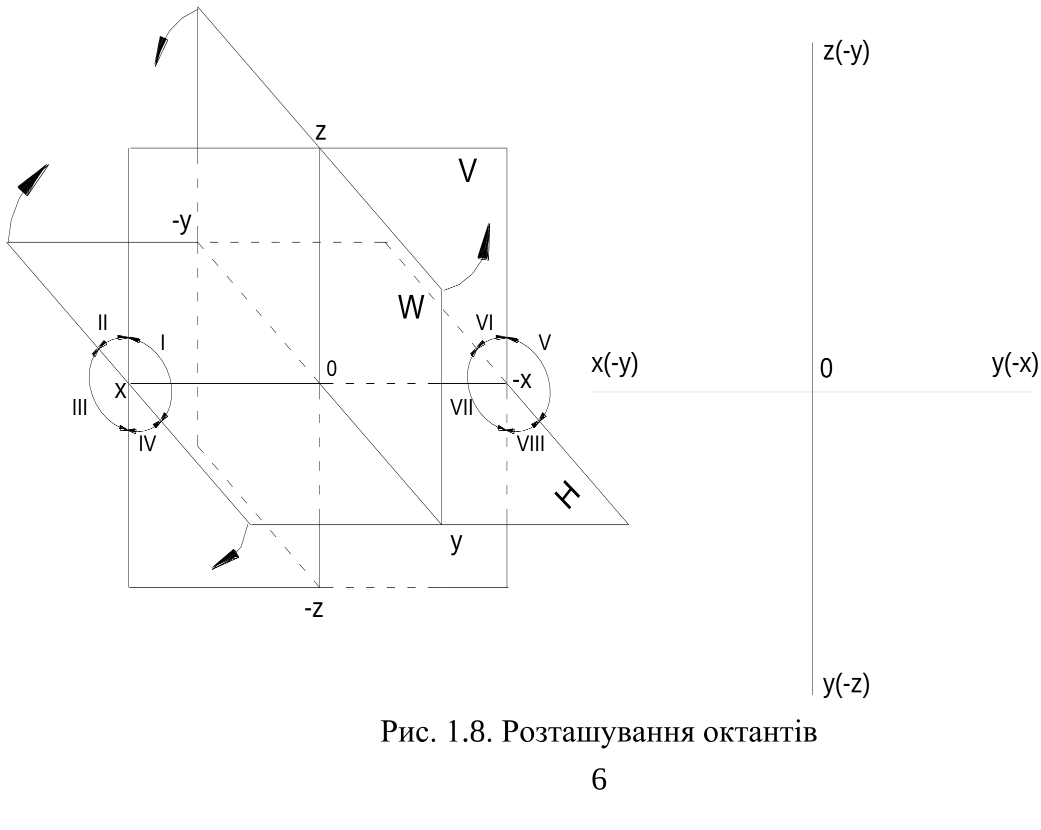


Рис. 1.8. Розташування октантів

ЛЕКЦІЯ №3.

Тема : Пряма. Класифікація. Взаємне положення точки і прямої. Визначення натуральної величини прямої.

3.1. Положення прямої відносно площин проекцій

Прямі в просторі поділяються на прямі загального положення, прямі рівня і проеціюючі (перпендикулярні).

Прямою загального положення називають пряму, яка похило розташована до всіх площин проекцій. Кожна її проекція менша від самої прямої (рис. 1.9).

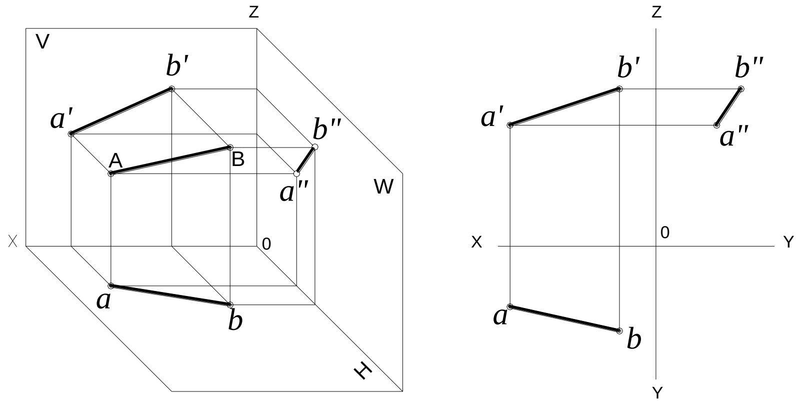


Рис. 1.9. Пряма загального положення

Проеціюючими називають прямі, які перпендикулярні одній з площин проекцій, тобто паралельні двом іншим площинам (рис. 1.10). На одній з площин проекцій проеціююча пряма зображується у вигляді точки, а на двох інших − у вигляді відрізків, що займають горизонтальне або вертикальне положення, ***величина яких дорівнює натуральній величині відрізка прямої.***

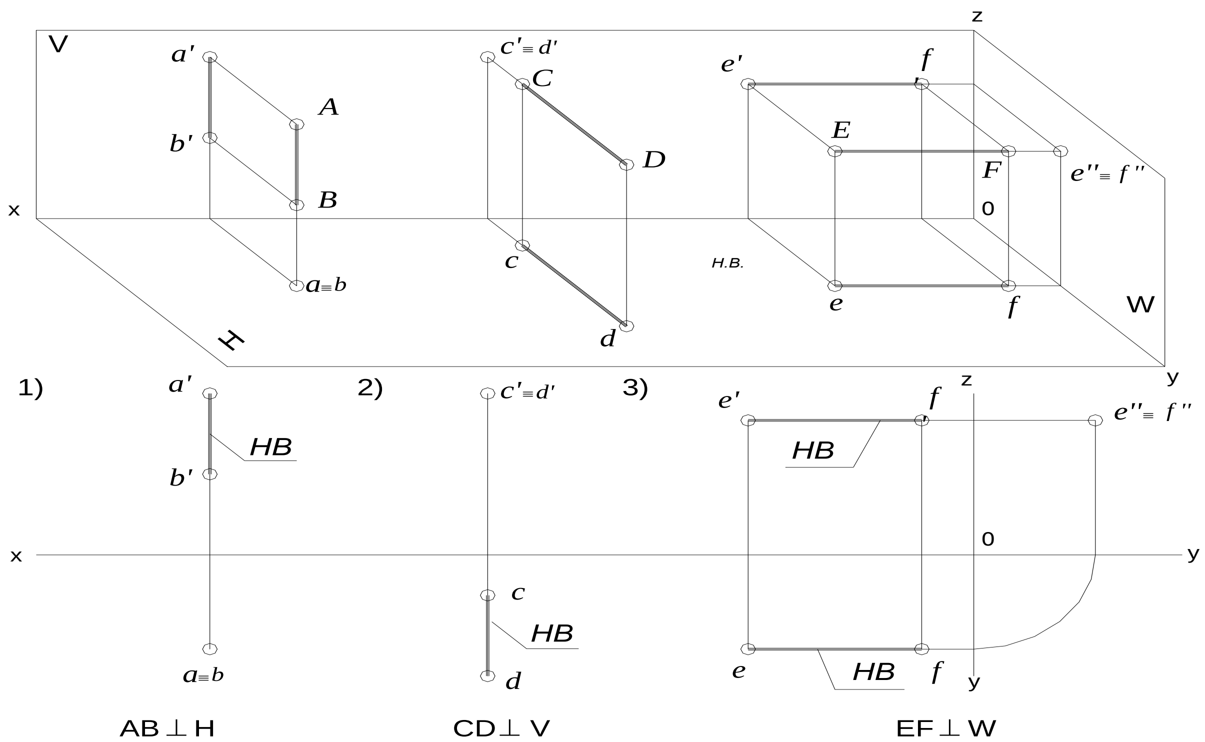


Рис. 1.10. Проеціюючі прямі:

1 – горизонтально-проеціююча; 2 – фронтально-проеціююча; 3 – профільно-проеціююча

Прямими рівня називають прямі, які паралельні одній з площин проекцій. На цю площину вони проеціюються в натуральну величину, а на дві інші – у вигляді горизонтальних або вертикальних відрізків менших розмірів (рис. 1.11).

Пряма, яка паралельна горизонтальній площині проекцій *H*, називається ***горизонтальною прямою*** або ***горизонталлю*** (рис. 1.11, 1). Якщо пряма, паралельна фронтальній площині проекцій *V*, то вона називається ***фронтальною прямою*** або ***фронталлю*** (рис. 1.11, 2).

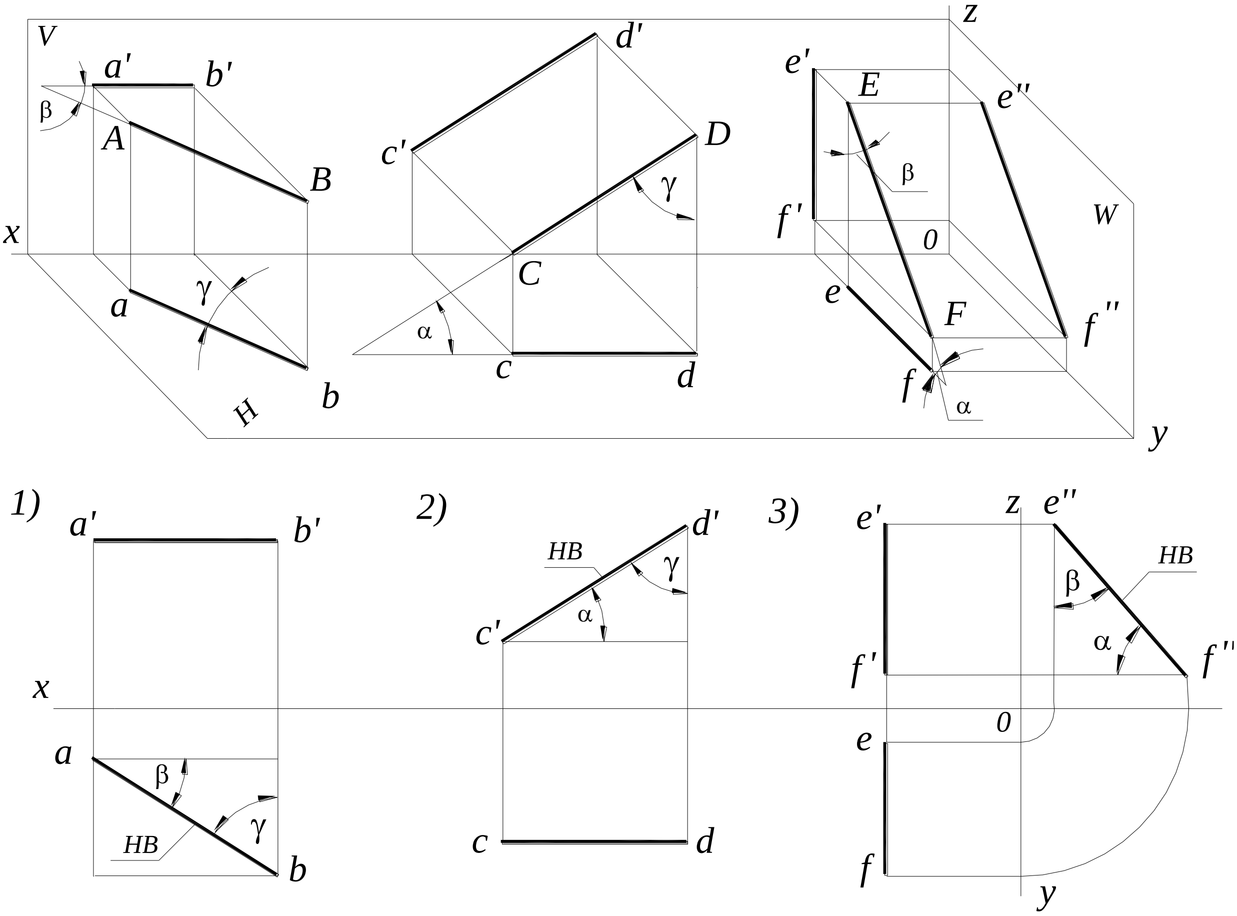


Рис. 1.11. Прямі рівня:
1 – горизонтального; 2 – фронтального; 3 – профільного

За кресленням прямої рівня можна визначити натуральну величину кутів нахилу прямої до площин проекцій, а саме:

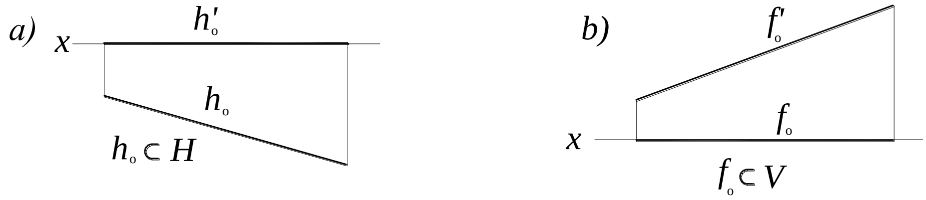
α – кут нахилу прямої до горизонтальної площини проекцій;

β – кут нахилу прямої до фронтальної площини проекцій;

γ – кут нахилу прямої до профільної площини проекцій.

Якщо прямі знаходяться у площинах проекцій, вони називаються: *нульовою горизонталлю h_0* (рис. 1.12, *а*) і *нульовою фронталлю f_0* (рис. 1.12, *б*).

У нульових горизонталях і фронталях одна проекція збігається із самою прямою *($h \equiv h_0$, $f \equiv f'_0$)*, а інша проекція знаходиться на осі *OX*.



Із розглянутого вище можна зробити висновок: ***якщо пряма займає положення, паралельне площині проекцій, або знаходиться у площині проекцій, то вона проеціюється на цю площину без спотворення, тобто проекція відрізка дорівнює самому відрізку прямої.***

3.2. Визначення натуральної величини прямої

Пряма загального положення похило розташована до всіх площин проекцій. Кожна її проекція менша від самої прямої, спотворені й кути нахилу прямої до площин проекцій.

Натуральна величина (НВ) відрізка прямої загального положення визначається гіпотенузою прямокутного трикутника, побудованого на одній з його проекцій як на катеті. Другий катет трикутника дорівнює різниці відстаней кінців іншої проекції від осі проекцій (рис. 1.13).

Кут між НВ відрізка прямої і її проекцією дорівнює куту нахилу прямої до відповідної площини проекцій.

На рис. 1.13 показано визначення натуральної величина відрізка прямої загального положення і кута її нахилу до горизонтальної площини проекцій. Якщо необхідно визначити β – кут нахилу прямої до фронтальної площини проекції, то прямокутний трикутник треба побудувати на фронтальній проекції прямої. Величина другого катета $\Delta Y = Y_A - Y_B$.

Для визначення кута γ побудову прямокутного трикутника необхідно виконувати на профільній проекції, величина другого катета $\Delta X = X_A - X_B$

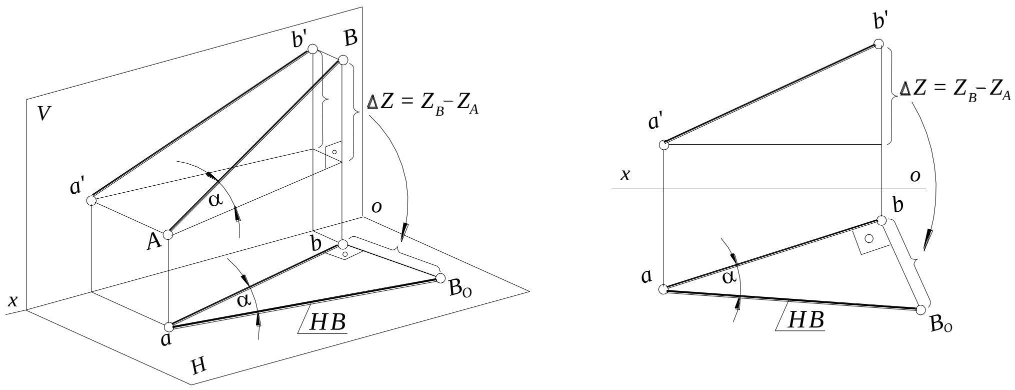


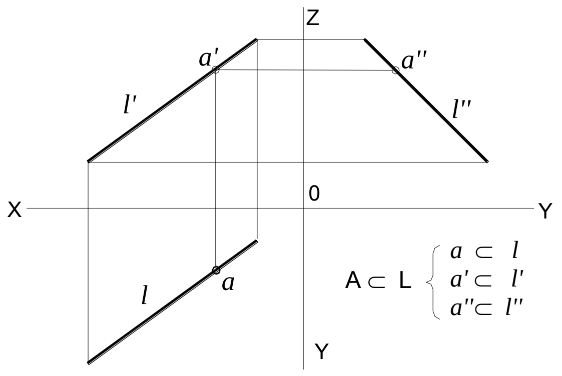
Рис. 1.13. Визначення натуральної величини прямої

3.3. Взаємне положення точки і прямої

***Якщо точка належить прямій**, то її проекції належать до однойменних проекцій прямої і знаходяться на одній лінії зв'язку* (рис. 1.14).

***Якщо точка розділяє пряму в будь-якому відношенні**, то проекції точки розділяють проекції прямої у тому самому відношенні.*

Наприклад: розділити відрізок прямої AB точкою C у відношенні $AC : BC = 2 : 3$ (рис. 1.15).



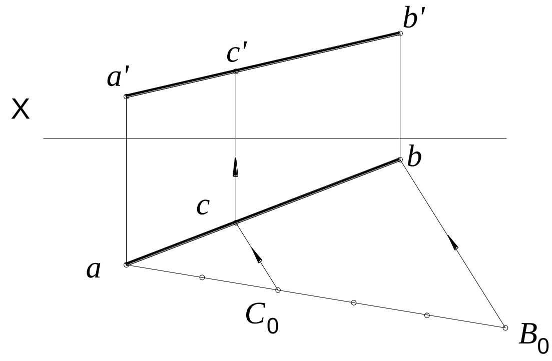


Рис. 1.14. Належність точки до прямої

Рис. 1.15. Поділ прямої у заданому відношенні

Для цього під будь-яким кутом проводять пряму aB_0 і на ній відкладають 5 відрізків довільної довжини. З'єднують точку B_0 з точкою B і паралельно їй проводять пряму через точку C_0 − одержують горизонтальну проекцію точки c, яка розділяє відрізок у відношенні 2:3. За вертикальною лінією зв'язку знаходять c'.

ЛЕКЦІЯ № 4.

Тема: Сліди прямої лінії. Взаємне положення двох прямих. Проекції прямого кута.

4.1. Сліди прямої лінії

Довільно розташована у просторі пряма при своєму продовженні обов'язково зустріне площини проекцій.

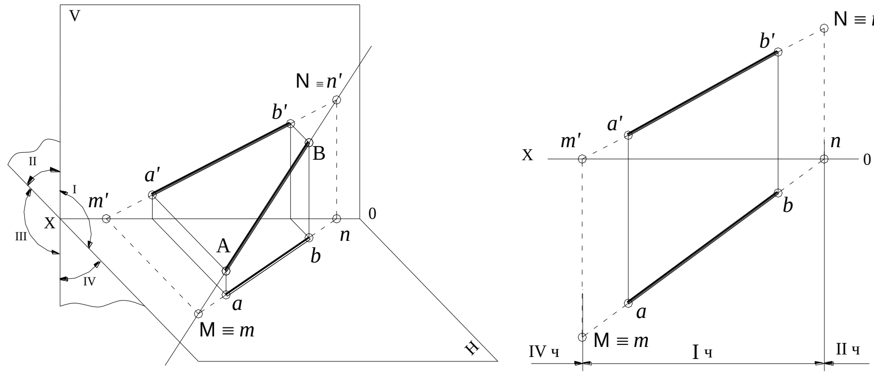


Рис. 1.16. Сліди прямої лінії

Слідами прямої лінії називаються точки зустрічі (перетину) прямої з площинами проекцій.

Точка зустрічі прямої з горизонтальною площиною $AB \cap H = M$ називається ***горизонтальним слідом прямої***, а точка зустрічі прямої з фронтальною площиною $AB \cap V = N$ – ***фронтальним (вертикальним) слідом прямої***. За слідами прямої визначають її положення в просторі.

Для визначення горизонтального сліду прямої на епюрі необхідно фронтальну проекцію прямої продовжити до перетину її з віссю OX і з отриманої точки провести вертикальну лінію зв'язку до перетину з продовженням горизонтальної проекції прямої. Одержують горизонтальну проекцію горизонтального сліду ***m****, що збігається із самим слідом M. Фронтальна проекція горизонтального сліду знаходиться на осі OX* (рис. 1.16).

Фронтальний слід прямої визначається аналогічно.

4.2. Взаємне положення двох прямих

Дві прямі у просторі можуть бути: паралельними, такими, що перетинаються, і мимобіжними (прямими, що схрещуються). Якщо прямі у просторі паралельні, то їх однойменні проекції на будь-якій площині проекцій також взаємно паралельні (рис. 1.17, а).

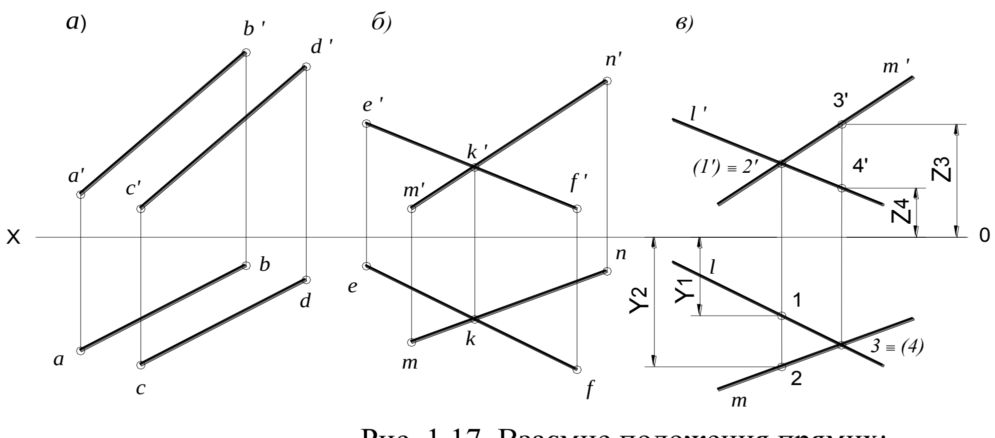


Рис. 1.17. Взаємне положення прямих:
а – паралельні прямі; б – пересічні прямі; в – мимобіжні (перехресні) прямі

***Якщо прямі лінії у просторі перетинаються**, то на комплексному кресленні їх однойменні проекції перетинаються в точках, які лежать на одній лінії зв'язку.*

*Якщо прямі у просторі не паралельні між собою і не перетинаються, то вони **мимобіжні (перехресні).***

*Точки перетину однойменних проекцій мимобіжних прямих не лежать на одній лінії проекційного зв'язку і називаються **конкуруючими**.* За допомогою таких точок визначають видимість геометричних елементів на комплексному кресленні.

Як видно з рис. 1.17, *в*, на фронтальній площині проекцій точка *2* закриває точку *1*, тому що $Y_2 > Y_1$, а на площині *H* точка *3* закриває точку *4* тому, що $Z_3 > Z_4$.

4.3. Проеціювання кутів

Кути проеціюються на площини проекцій зменшеної або збільшеної величини залежно від їх положення відносно площин проекцій (рис. 1.18, *а*). Без спотворення (в натуральну величину) кут проеціюється на площину проекцій тільки у випадку, коли його, обидві сторони паралельні цій площині проекцій.

Прямий кут також проеціюється на площини проекцій із спотворенням у разі, ***коли площина прямого кута не перпендикулярна площині проекцій і хоч би одна зі сторін його паралельна будь-якій площині проекцій, тоді на цю площину прямий кут проеціюється в натуральну величину*** (рис. 1.18, *б*).

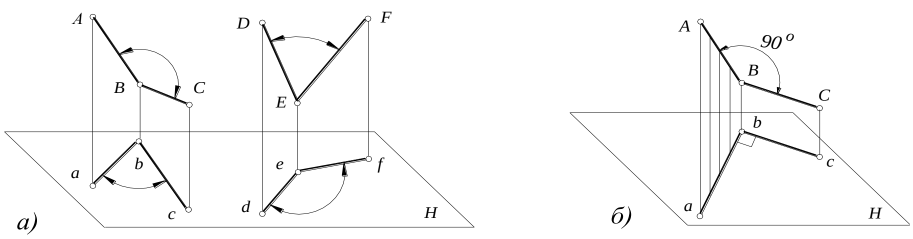


Рис. 1.18. Проеціювання кутів

ЛЕКЦІЯ № 5.

Тема: Площина.Способы завдання. Класифікація площин. Пряма і точка у площині. Лінії окремого положення в площини

5.1. Способи завдання площини на комплексному кресленні

На комплексному кресленні площина може бути задана таким чином: *а*) проекціями трьох точок, що не лежать на одній прямій; *б*) проекціями прямої і точки поза прямою; *в*) проекціями двох прямих, що перетинаються; *г*) проекціями двох паралельних прямих; *д*) проекціями будь якої плоскої фігури; *е*) слідами площини (рис. 1.19).

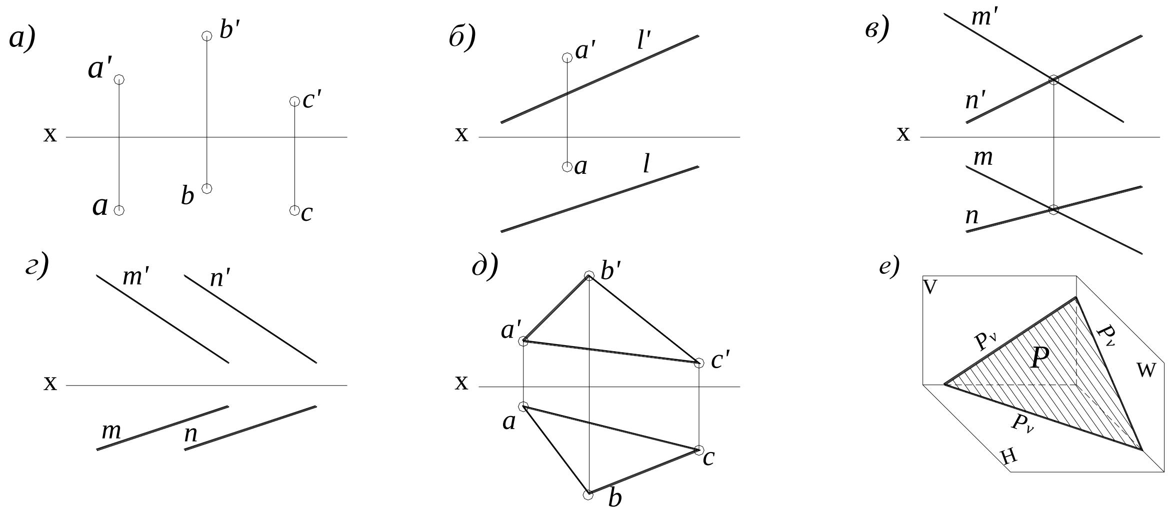


Рис. 1.19. Способи завдання площин

***Слідами площини** називають лінії, по яких площина перетинає площини проекцій*. Пряма, по якій задана площина P (рис. 1.20) перетинає горизонтальну площину проекцій, називається *горизонтальним слідом площини* і позначається P_H; пряма, по якій площина P перетинає фронтальну площину проекцій, називається *фронтальним слідом площини* і позначається P_V. Точка на осі *X,* в якій перетинаються сліди площини, називається *точкою сходження слідів* і позначається P_x.

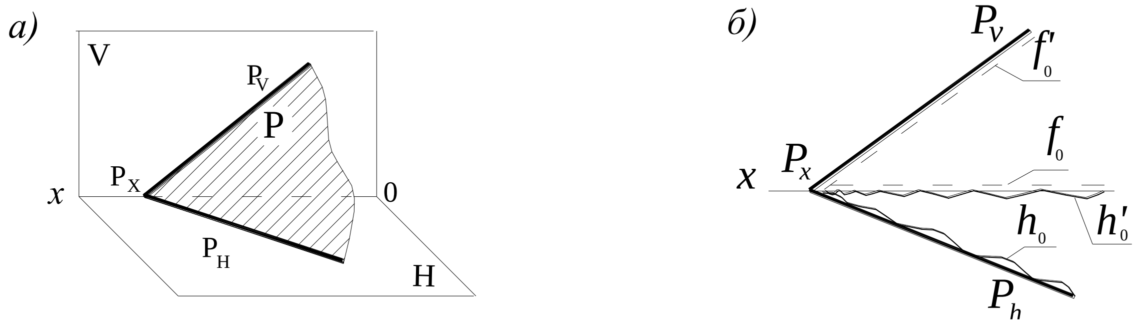


Рис. 1.20. Площини загального положення

Слід площини – це пряма, яка належить площині проекцій. Тому одна із проекцій кожного сліду збігається із самим слідом, а інша проекція – з віссю *OX.* Так, фронтальний слід P_V збігається з фронтальною проекцією f'_0, а горизонтальна проекція фронтального сліду f_0 знаходиться на осі *OX.* Горизонтальний слід P_H збігається з горизонтальною проекцією h_0, а фронтальна проекція горизонтального сліду h'_0 знаходиться на осі *OX* (рис. 1.20).

За розташуванням слідів площини можна судити про положення заданої площини відносно площин проекцій.

5.2. Класифікація площин

Залежно від положення площини відносно площин проекцій вони діляться на площини загального положення, площини рівня і проеціюючі (перпендикулярні).

Площини загального положення *не перпендикулярні й не паралельні жодній з площин проекцій* (рис. 1.20). Вони проеціюються на всі три площини проекцій спотворено (мають меншу величину). Спотворено проеціюються також і кути нахилу площини до площин проекцій. Їх можна визначити за допомогою лінії найбільшого нахилу площини (рис. 1.24).

Проеціюючими *називають площини, які перпендикулярні одній з площин проекцій* (рис. 1.21).

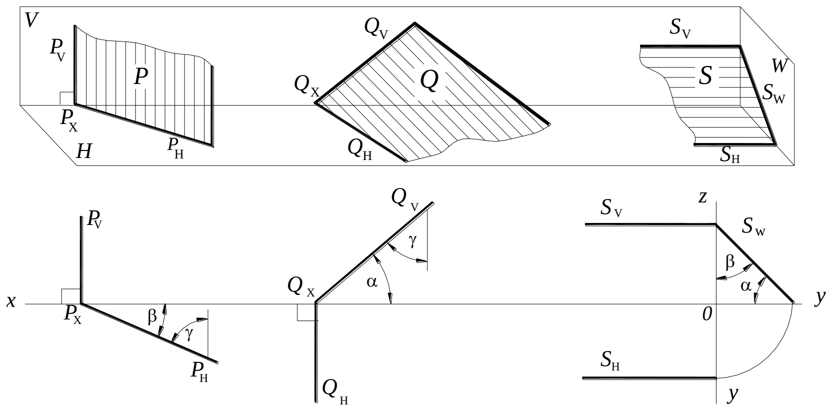


Рис. 1.21. Проеціюючі площини:

$P \perp H$ – *горизонтально-проеціююча;* $Q \perp V$ – *фронтально-проеціююча;* $S \perp W$ – *профільно-проеціююча*

Проеціююча площина зображується на перпендикулярній до неї площині як похила пряма – **слід площини**, на двох інших площинах проекцій її зображення спотворене.

Слід проеціюючої площини *має збірні властивості, тобто одна з проекцій будь-якої фігури, що належить площині, збігається зі слідом площини.*

Проеціюючі площини складають з однією із площин проекцій кут 90°, сума двох інших кутів дорівнює також 90°, позначення цих кутів такі:

α – *кут нахилу площини до горизонтальної площини проекцій;*

β – *кут нахилу площини до фронтальної площини проекцій;*

γ – *кут нахилу площини до профільної площини проекцій.*

Площинами рівня *називають площини, які паралельні одній і перпендикулярні до двох площин проекцій* (рис. 1.22).

Площини рівня проеціюються на одну з площин проекцій у натуральну величину, а на дві інші – у вигляді прямих, паралельних або перпендикулярних осям проекцій.

Слід площини рівня*, як і проеціюючої площини, має збірні властивості, тобто на слід проеціюються всі точки, прямі, фігури, які належать даній площині.*

Площини рівня також, як і проеціюючі, можна задавати на епюрі тільки одним слідом.

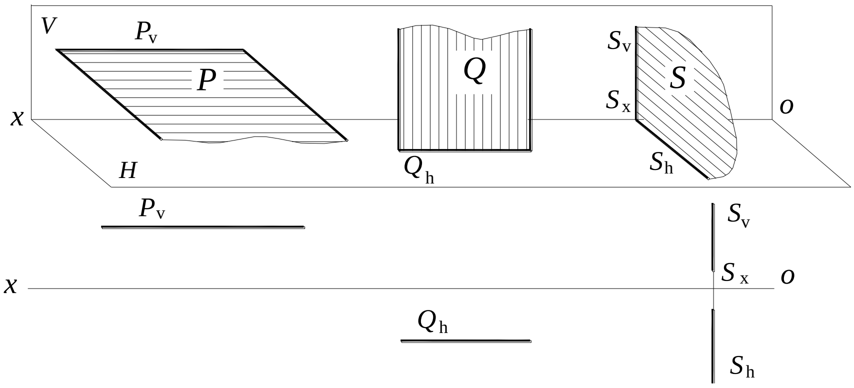


Рис. 1.22. Площини рівня:

P ∥ H – *горизонтальна*; Q ∥ V – *фронтальна*; S ∥ W – *профільна*

5.3. Пряма і точка в площині

Пряма належить площині в таких випадках:

а) *якщо вона проходить через дві точки цієї площини або якщо її сліди знаходяться на однойменних слідах площини* (рис. 1.23, *а*);б) *якщо вона проходить через одну її точку паралельно будь-якій прямій цієї площини або якщо одна з проекцій прямої паралельна будь-якому сліду площини, а друга проекція має спільну точку з другим слідом площини* (рис. 1.23, *б*).

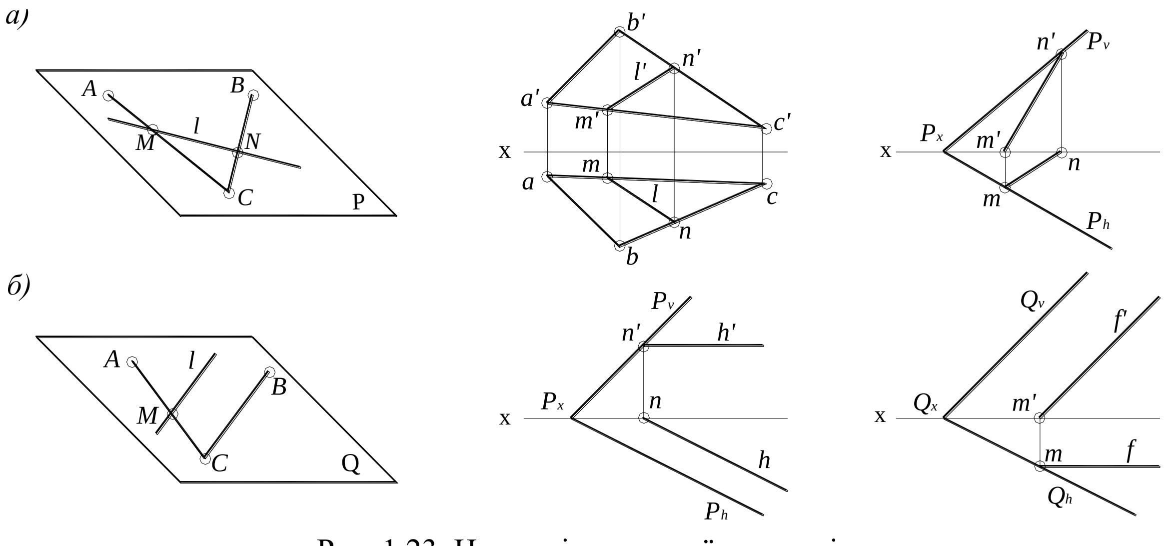


Рис. 1.23. Належність прямої площині

Точка належить площині, якщо вона знаходиться на прямій цієї площини.

На рис. 1.25 показана точка *A,* яка належить площині *P,* оскільки її проекції знаходяться на однойменних проекціях прямої $1-2$ цієї площини.

У площині загального положення можна провести такі прямі: ***горизонталь, фронталь, профільну пряму, лінію найбільшого нахилу площини (ЛНН),*** а також довільну пряму загального положення.

Горизонталлю площини (h) *називають пряму, яка належить цій площині і паралельна горизонтальній площині проекцій* (рис. 1.23, *б*).

Побудову горизонталі завжди починають із фронтальної проекції паралельно осі *ox,* тобто $h' \parallel ox$.

Фронталлю площини (f) *називають пряму, яка належить цій площині і паралельна фронтальній площині проекцій* (рис. 1.23, *б*).

Побудову фронталі завжди починають з горизонтальної проекції паралельно осі *ox*, тобто $f \parallel ox$.

Лініями найбільшого нахилу площини *до площин H, V і W називають прямі, які належать цій площині і перпендикулярні або до горизонталей площини, або до її фронталей, або до її профільних прямих*. Їх називають також лініями скату, падіння площини.

За допомогою лінії найбільшого нахилу визначають кути нахилу площин загального положення до площин проекцій. Наприклад, на рис. 1.24 показано визначення кута нахилу площин *P* до горизонтальної площини проекцій *H*. Для цього в площині проводиться гори-

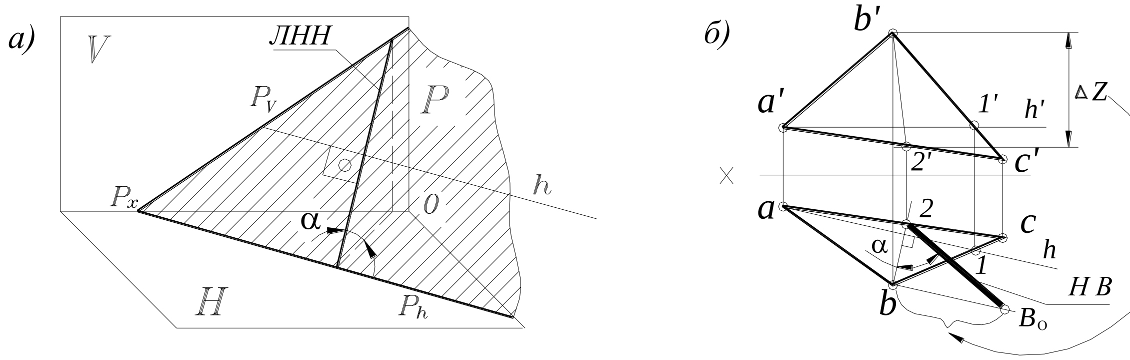


Рис. 1.24. Визначення кута нахилу площини

зонталь перпендикулярно до якої проводиться ЛНН (*b* – *2* на рис. 1.24, *б*) і для визначення кута – будують прямокутний трикутник (див. розділ 1.3.2., рис. 1.13).

Щоб побудувати фронтальну проекцію трикутника *ABC* (рис. 1.25) по заданих горизонтальних проекціях точок трикутника , який належить площині *P(ΔABC)*, необхідно виконати:

1) через горизонтальну проекцію точки *A* проводимо довільну горизонтальну проекцію прямої 1 – 2, знаходимо фронтальну проекцію цієї прямої і через горизонтальну проекцію точки *A* проводимо вертикальну лінію зв’язку до перетину її з фронтальною проекцією лінії 1 – 2, на якій і буде фронтальна проекція точки *A*;

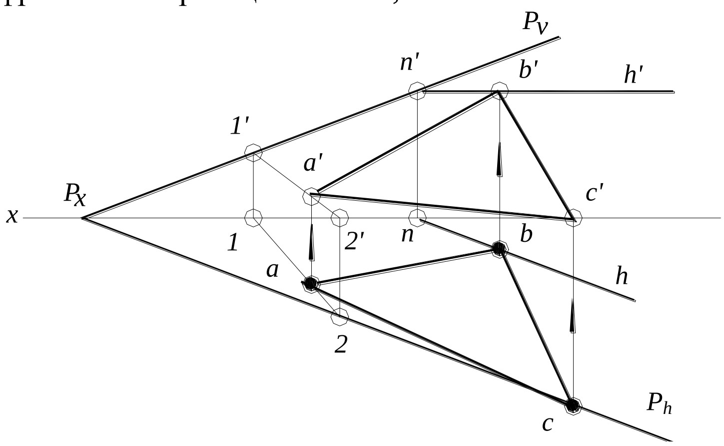


Рис. 1.25. Побудова відсутніх проекцій точок трикутника:
● – задані точки; ○ – побудовані точки

2) побудову фронтальної проекції точки *B* можливо виконати так само, як і для точки *A*, але краще в цих випадках використовувати пряму не загального положення, а пряму рівня (у даному випадку горизонталь *h*);

3) фронтальна проекція точки *C* знаходиться на осі, оскільки сама точка *C* знаходиться на горизонтальному сліді *Ph*.

ЛЕКЦІЯ №6-7.

Тема: Відносне положення двох площин, прямої і площини

Дві площини в просторі (якщо вони не зливаються) або паралельні між собою, або перетинаються.

6.1. Паралельність площин

Дві площини паралельні *між собою, якщо дві пересічні прямі однієї площини відповідно паралельні двом пересічним прямим другої площини. Отже, якщо площини паралельні, то однойменні їх сліди також паралельні* (рис. 1.26).

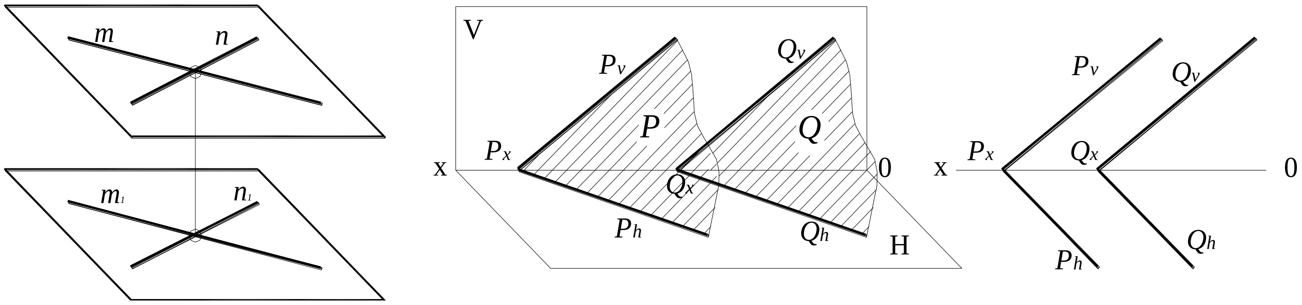


Рис. 1.26. Паралельність площин

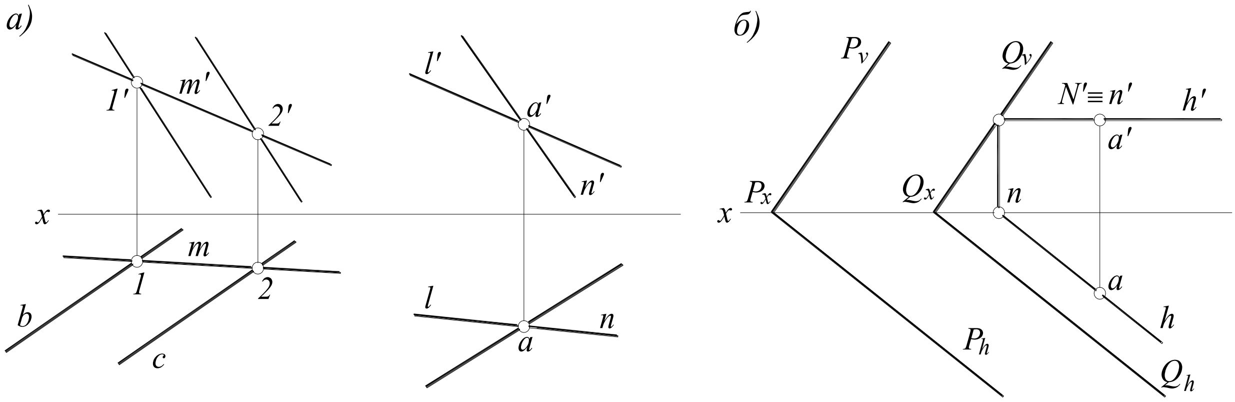


Рис. 1.27. Побудова паралельної площини

Для того щоб побудувати площину Q через точку A паралельно площині $P(b \parallel c$, або іншим способом крім слідів*)* (рис. 1.27, *а*) необхідно виконати слідуючи побудови:

Якщо площина P задана двома паралельними $(b \parallel c)$ чи двома пересічними прямими $(b \cap c)$ або будь-якою плоскою фігурою, то в цій площині проводять довільну пряму m, а потім через точку A проводять дві пересічні прямі, одна з яких паралельна прямій m, а друга – паралельна будь-якій прямій площини P. Тобто площину Q задають двома прямими, які перетинаються (рис. 1.27, *а*), зокрема:

1) у площині $P(b \parallel c)$ проводимо довільну пряму m, тобто

$$m \supset P(b \parallel c);$$

2) через точку A проводимо пряму l паралельно прямій m, тобто

$$l \supset A,\ l /\!/ m;$$

3) через точку A проводимо пряму n паралельно прямій b, тобто

$$n \supset A,\ n /\!/ b;$$

4) дві прямі, що перетинаються, дають площину Q, тобто

$$Q(l \supset n) /\!/ P(b /\!/ c).$$

Якщо площина P (рис. 1.27,*б*) задана слідами, то через точку A проводять пряму горизонтального чи фронтального рівня. Якщо проводять горизонталь, то горизонтальна проекція горизонталі паралельна горизонтальному сліду, тобто $h /\!/ Ph$. Якщо проводять фронталь, то $f' /\!/ Pv$. Потім для горизонталі будують фронтальний слід прямої, а для фронталі – горизонтальний слід, через які проводять сліди площини Q (рис. 1.27, *б*), виконуючи такі дії:

1) через точку A проводять горизонтальну пряму паралельно площині P, тобто

$$h \supset A;\ h /\!/ Ph;\ h' /\!/ ox;$$

2) знаходять фронтальний слід цієї прямої, тобто

$$h \cap V = N;$$

3) через фронтальний слід N проводять фронтальний слід площини Qv паралельно Pv, а саме: $Qv \supset N;\ Qv /\!/ Pv;$

4) знаходять точку збігу слідів, тобто $Qv \cap OX = Qx;$

5) проводять горизонтальний слід площини, а саме: $Qh \supset Qx;\ Qh /\!/ Ph /\!/ h.$

6.2. Паралельність прямої і площини

Пряма паралельна площині, *якщо вона паралельна будь-якій прямій, що належить цій площині* (рис. 1.28).

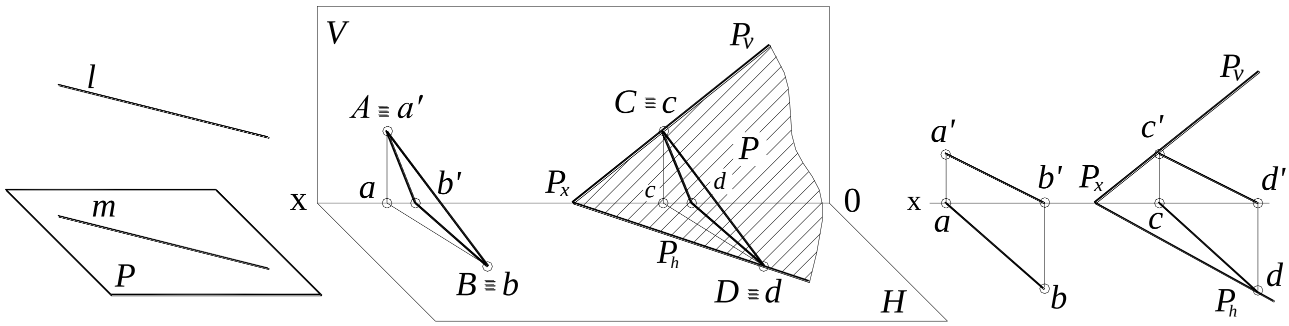


Рис. 1.28. Паралельність прямої і площини

Для того, щоб через точку A провести пряму l, паралельну заданій площині $P(b \cap c)$, (рис. 1.29, *а*) необхідно в площині провести будь-яку пряму m, а потім через точку провести пряму l, паралельну прямій m, яка належить площині. Отже, якщо $l /\!/ m$, то $l /\!/ P(b \cap c)$.

.Для того, щоб через точку *A* провести площину *P*, паралельну заданій прямій (рис. 1.29, *б*) необхідно через точку провести одну пряму *m*, паралельну заданій *l*, а другу пряму *n* будь-якого напрямку. Таким чином, через точку можна побудувати безліч площин, заданих двома пересічними прямими.

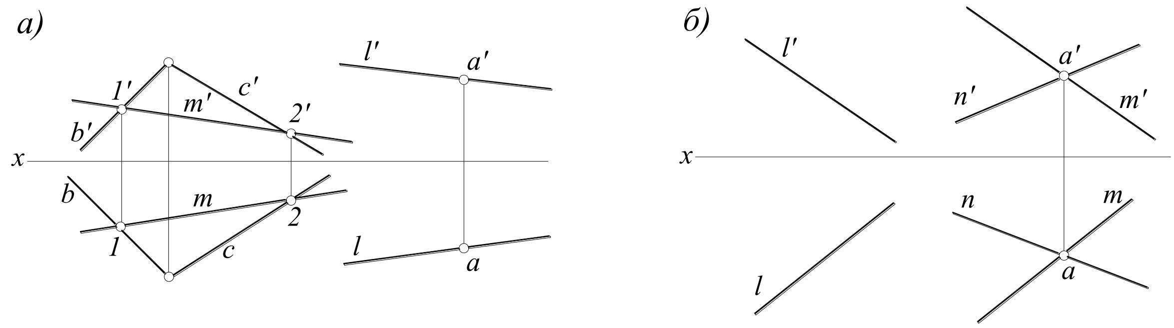


Рис. 1.29: *а* – побудова прямої *l* паралельно площині $P(b\cap c)$;
б – побудова площини $P(b\cap c)$ паралельно прямій *l*.

6.3. Площини, які перетинаються

Лінія перетину двох площин визначається або двома точками, які одночасно належать заданим площинам (рис. 1.30, *а*), або однією спільною точкою та визначеним напрямком цієї лінії (рис. 1.30, *б*).

Якщо одна з площин, що перетинається, горизонтального або фронтального рівня, то лінія перетину цих площин буде відповідно горизонтальною чи фронтальною прямою.

У загальному випадку для побудови лінії перетину двох площин використовують метод допоміжних січних площин. Задані площини перетинають допоміжними площинами (площиною проекцій, площиною рівня або перпендикулярною площиною).

Якщо площини задані слідами, то для побудови лінії перетину використовують у ролі допоміжних площини проекцій *H* і *V* , які перетинають площини *P* і *Q* по горизонтальних і фронтальних слідах (рис. 1.30, *а*). Перетин слідів дає точки *M* і *N* лінії перетину площин.

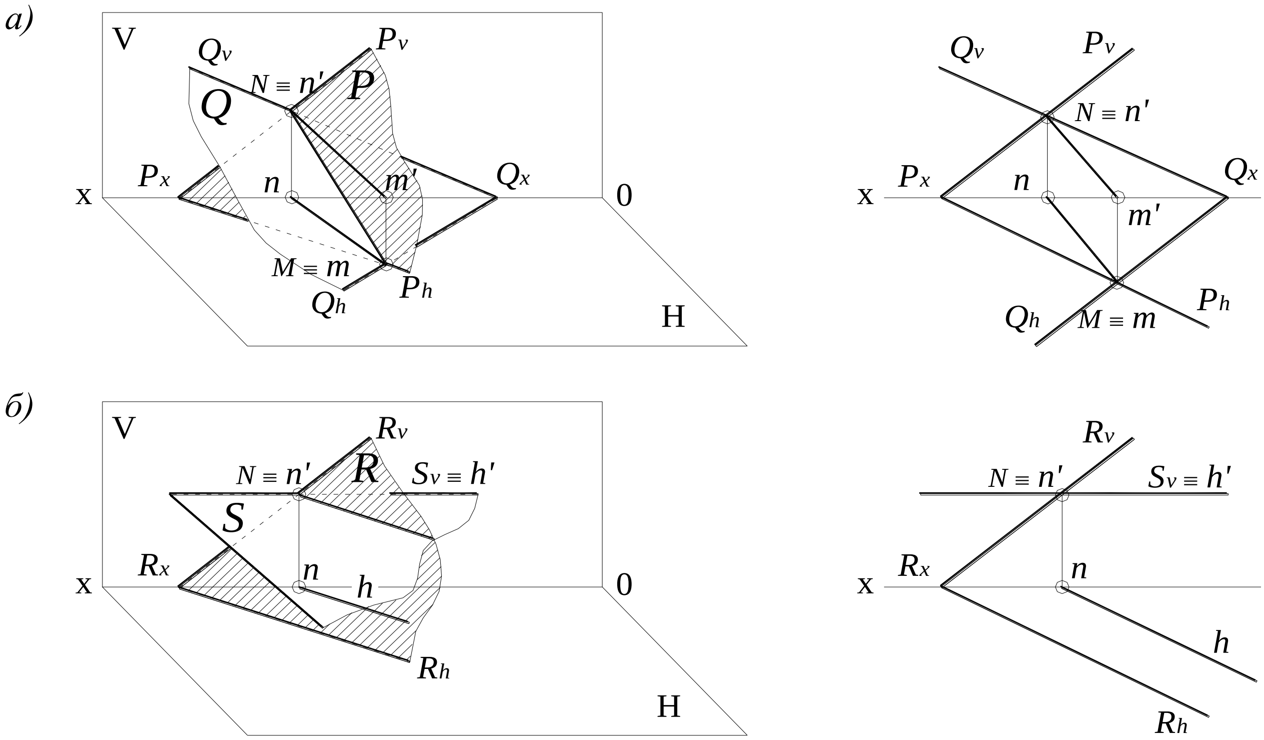


Рис. 1.30. Площини, які перетинаються

Для побудови лінії перетину площини *P(a∥b)* і *Q(ΔCDE)* загального положення (рис. 1.31), їх перетинають допоміжними площинами *S* і *T* (у нашому випадку горизонтального рівня). Площина *S* перетинає площини *P* і *Q* відповідно по прямих *1 – 2 і 3 – 4* ($S \cap P$ = *1 – 2*; $S \cap Q$ = *3 – 4*).

Перетин прямих *1 – 2* і *3 – 4* дає шукану точку *M*, яка належить лінії перетину площин $[(1 - 2) \cap (3 - 4) = M]$.

Площина *T* перетинає площини *P* і *Q*. Для добудови лінії перетину беруть на кожній площині тільки по одній точці (*5* і 6), оскільки *T∥S.* Лінія перетину 5 буде паралельна лінії (1 – 2), лінія перетину 6 – паралельна лінії (3 – 4), ($T \cap P = 5$; $T \cap Q = 6$).

Перетин прямих *5* і *6* дає другу шукану точку *N* лінії перетину площин ($5 \cap 6 = N$) (рис. 1.31).

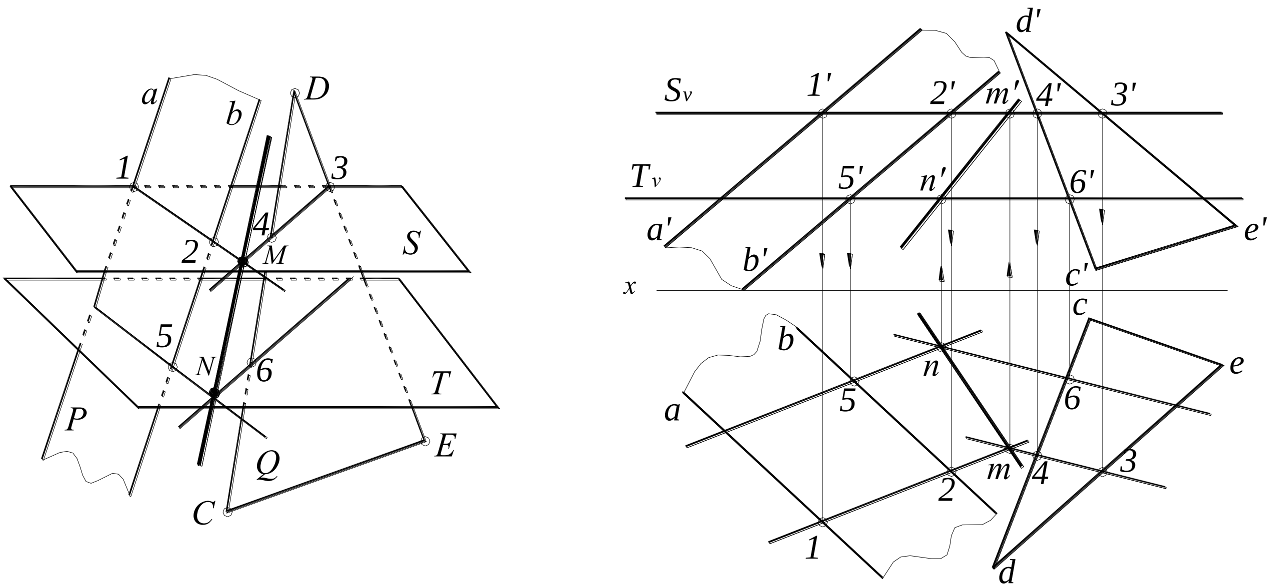


Рис. 1.31. Побудова лінії перетину двох площин

Якщо перетинаються дві площини *P* і *Q* – загального положення, одна пара слідів цих площин паралельна між собою (рис. 1.32) для побудови лінії перетину необхідно виконати:

1. Одна із проекцій спільної точки лінії перетину площин *P* і *Q* знаходиться у точці перетину горизонтальних слідів (рис. 1.32, *а*) або у точці перетину фронтальних слідів (1.32, *б*).

2. Лінія перетину площин буде проходити паралельно цим слідам, тобто лінія перетину буде або *горизонталлю*, або *фронталлю.*

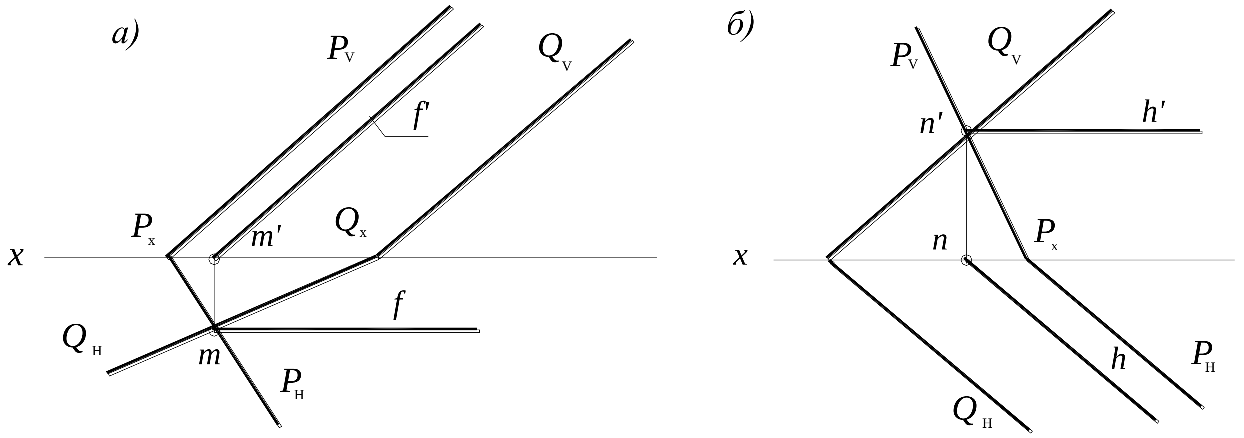


Рис. 1.32. Побудова лінії перетину двох площин із паралельними слідами

Якщо перетинаються дві площини: *P* – загального положення, *Q* – проеціюючого положення (рис. 1.33, *а, б*) або площина рівня (рис. 1.33, *в, г*) то лінію перетину площин будують так:

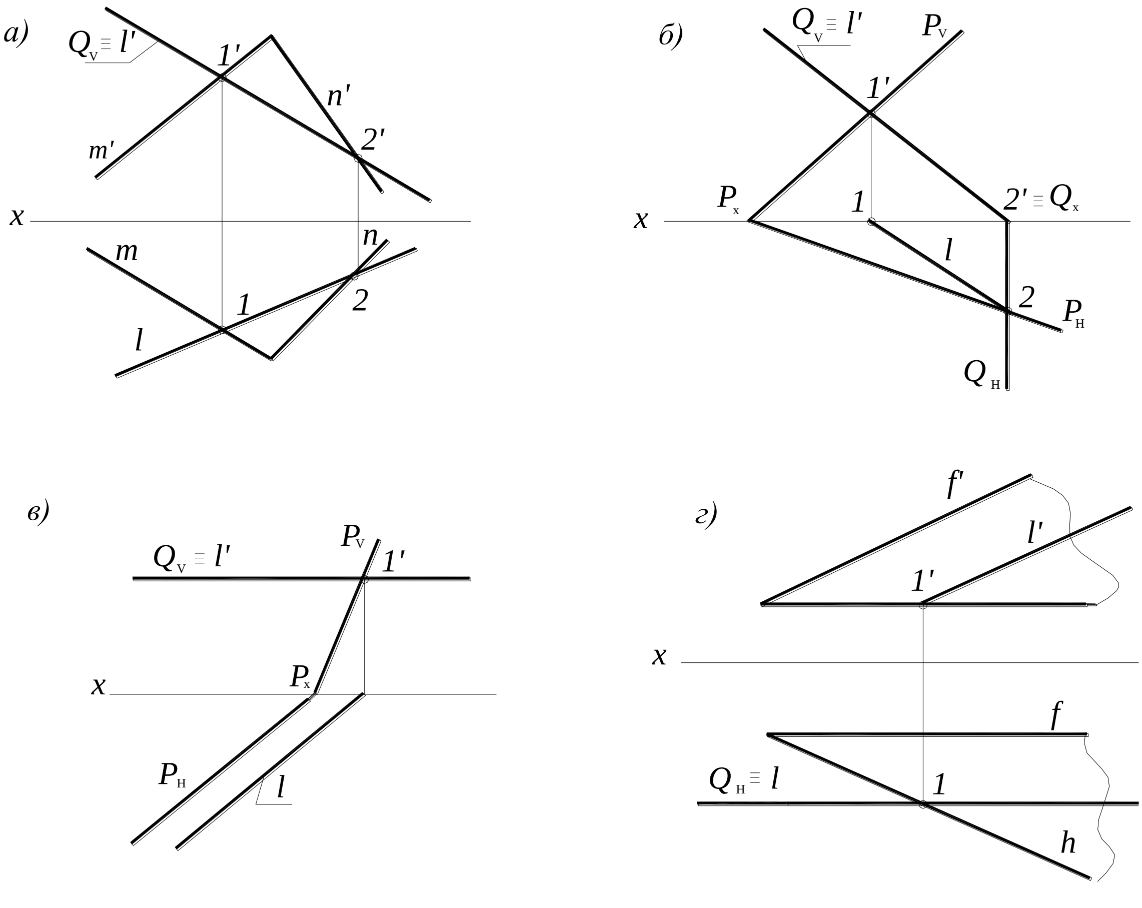


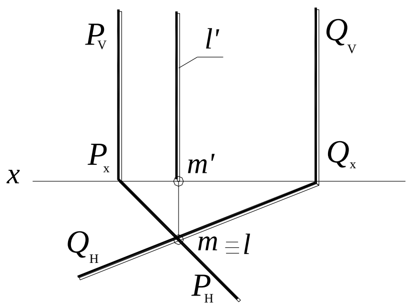
Рис. 1.33. Побудова лінії перетину двох площин

1. Одна із проекцій лінії перетину площин збігається зі слідом або проеціюючої площини *Q* (рис. 1.33, *а, б*), або площини рівня (рис. 1.33, *в, г*), тобто вона вже побудована.

2. Другу проекцію лінії перетину площин будують або за двома точками, які одночасно належать заданим площинам (рис. 1.33, *а, б*), або по одній спільній точці та за визначеним напрямком цієї лінії, якщо одна із площин є площиною рівня (рис. 1.33, *в, г*).

Дві проеціюючі площини P і Q, які перпендикулярні до однієї і тієї ж площини проекцій (рис. 1.34) перетинаються по прямій, яка перпендикулярна до тієї ж площини проекцій..

Щоб побудувати точку перетину трьох площин P, Q і S, які перетинаються (рис. 1.35)необхідно:



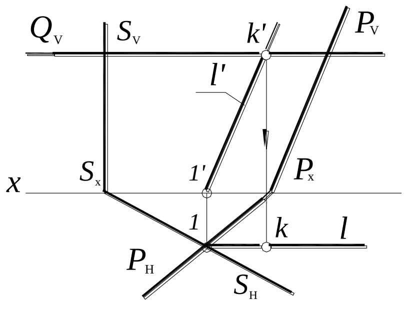


Рис. 1.34. Лінія перетину проеціюючих площин Рис. 1.35. Точка перетину трьох площин

1. При перетині горизонтальних слідів площин P_H і S_H одержують горизонтальну проекцію точки *1* лінії перетину цих площин, а фронтальна проекція точки $1'$ знаходиться на осі OX. Горизонтальна проекція лінії перетину площин l буде паралельна осі OX, а фронтальна проекція – $l' \parallel P_V$.

2. При перетині фронтальної проекції прямої l' з фронтальним слідом площини Q_V одержують фронтальну проекцію точки перетину площин k', а горизонтальну проекцію точки перетину площин k знаходять за допомогою вертикальної лінії зв'язку.

7.1. Перетин прямої з площиною

Точка перетину прямої з площиною (точка зустрічі) визначається як точка, яка належить одночасно і прямій, і площині.

Якщо задані пряма l і площина $P(\Delta ABC)$ займають загальне положення (рис. 1.36), то точку їх перетину (зустрічі) знаходять у такій послідовності:

1) Через пряму проводять допоміжну перпендикулярну січну площину ($l \subset S \perp V$).

2) Визначають лінію перетину допоміжної та заданої площин ($S \cap P(\Delta ABC) = MN$).

3) Знаходять точку зустрічі на перетині одержаної лінії із заданою прямою ($MN \cap l = K$).

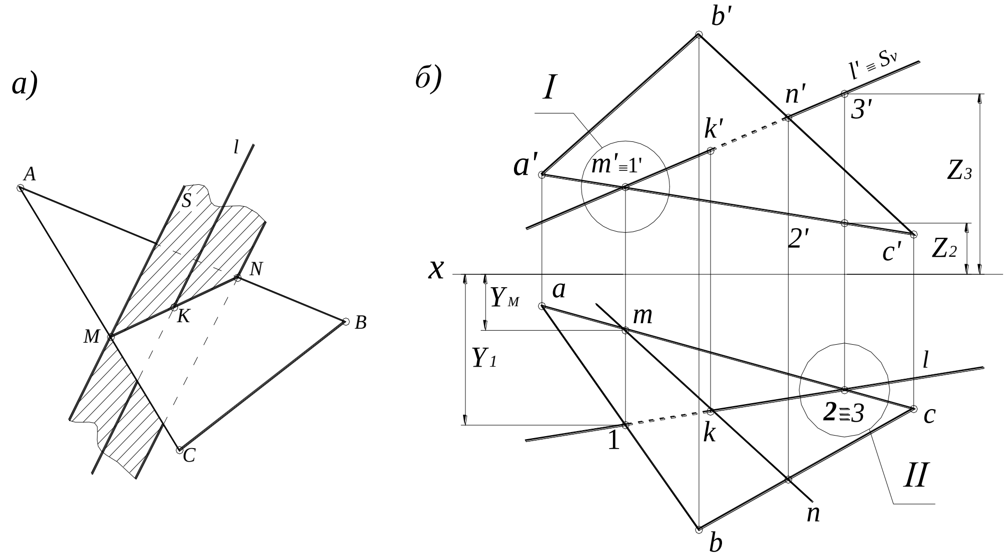


Рис. 1.36. Перетин прямої з площиною загального положення

Крім цього, необхідно визначити видимість прямої відносно площини за допомогою конкуруючих точок. Для цього на площині *V* (рис. 1.36, *б*) вибирають конкуруючі точки *M* і *1* (ділянка І). Точка *M* знаходиться на прямій *AC*, тобто на площині *ΔABC*, а точка *1* на прямій *l*. Проводять вертикальні лінії зв'язку, визначають горизонтальні проекції цих точок і порівнюють їх координати *Y*. Оскільки $Y_1 > Y_m$, то видимою на цій ділянці площини *V* буде пряма *l*.

На площині *H* видимість визначають за допомогою конкуруючих точок *2* і *3* (ділянка ІІ). Точка *2* знаходиться на прямій *AC*, тобто на площині, а точка *3* на прямій *l*. Проводять вертикальні лінії зв'язку, визначають фронтальні проекції цих точок і порівнюють їх координати *Z*. Оскільки $Z_3 > Z_2$, то видимою на цій ділянці площини *H* буде пряма *l*.

Одна із проекцій точки перетину площини *Q* і прямої *l*, які займають проеціююче положення, збігається зі слідом прямої, друга – зі слідом площини (рис. 1.37, *а*).

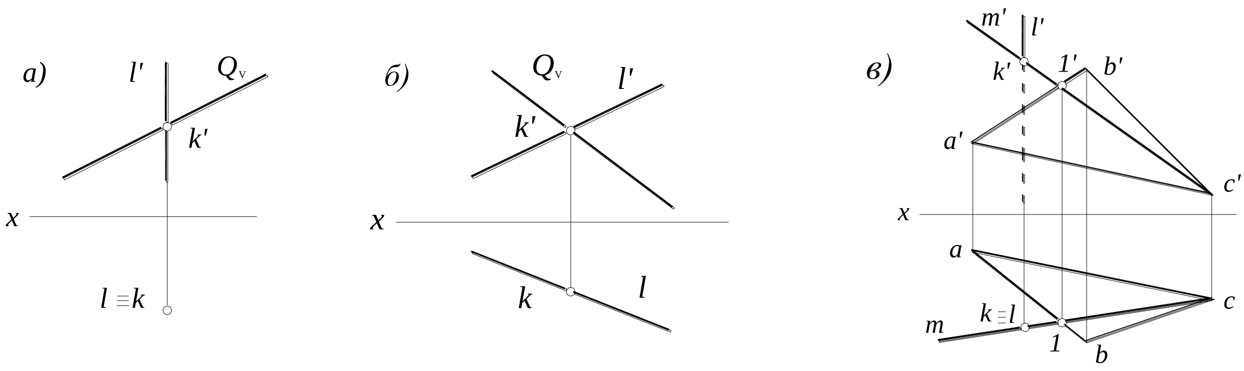


Рис. 1.37. Перетин прямої з площиною

Одна із проекцій точки перетину знаходиться на перетині прямої загального положення з проеціюючою площиною, другу проекцію точки перетину знаходять за законом проеціювання (рис. 1.37, *б*).

Одна із проекцій точки перетину збігається із слідом проеціюючої прямої, другу проекцію точки перетину знаходять шляхом проведення у площині допоміжної прямої *m*, яку проводять через площину і проеціюючу пряму. При перетині прямої *m* з площиною одержують горизонтальну проекцію точки *1*, знаходять фронтальну проекцію точки *1*, через яку проводять фронтальну проекцію прямої *m'*. При перетині фронтальних проекцій прямих *l'* і *m'* одержують фронтальну проекцію точки *k'* (рис. 1.37, *в*).

ЛЕКЦІЯ № 8

Тема: Перпендикулярність прямої і площини. Перпендикулярність площин

8.1. Перпендикулярність прямої і площини

Позначення перпендикулярності прямих і площин на комплексному кресленні (епюрі) базується на теоремі: *якщо одна із сторін прямого кута паралельна будь-якій із площин проекцій, а друга їй не перпендикулярна, то на цю площину прямий кут проеціюється без деформації (у натуральну величину).*

Пряма перпендикулярна площині, якщо вона перпендикулярна двом прямим цієї площини, які перетинаються. Такими прямими на комплексному кресленні можна вибрати лінії рівня площини (рис. 1.38, *а*).

Якщо пряма r перпендикулярна площині P, то її горизонтальна проекція перпендикулярна горизонтальній проекції горизонталі ($\mathbf{r \perp h}$), а фронтальна проекція прямої перпендикулярна фронтальній проекції фронталі ($\mathbf{r' \perp f'}$) (рис. 1.38, *б*).

Якщо пряма r перпендикулярна площині P, яка задана слідами (сліди площини є нульовими лініями рівня), ***то її проекції перпендикулярні відповідним слідам, тобто горизонтальна проекція перпендикулярна горизонтальному сліду площини ($\mathbf{r \perp P_H}$), а фронтальна проекція прямої перпендикулярна фронтальному сліду площини ($\mathbf{r' \perp P_V}$)*** (рис. 1.38, *в*).

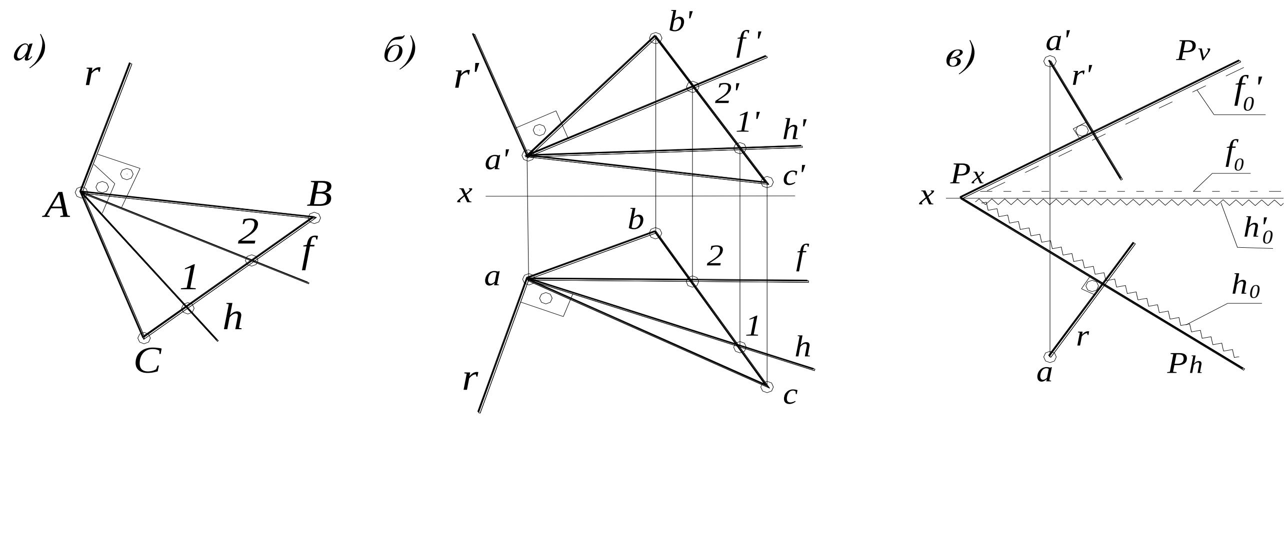


Рис. 1.38. Перпендикулярність прямої і площини

Для того, щоб із точки *A* опустити перпендикуляр на площину *P(ΔBCD)* і знайти його основу (якщо площина задана двома паралельними чи пересічними прямими або будь-якою плоскою фігурою), необхідно (рис. 1.39, *а*):

1) у площині провести горизонтальну та фронтальну пряму ($h \subset P$, $f \subset P$);

2) із точки опустити перпендикуляр, тобто $r' \perp f'$, $r \perp h$;

3) через перпендикуляр провести допоміжну перпендикулярну площину *S*, тобто $r \supset S$;

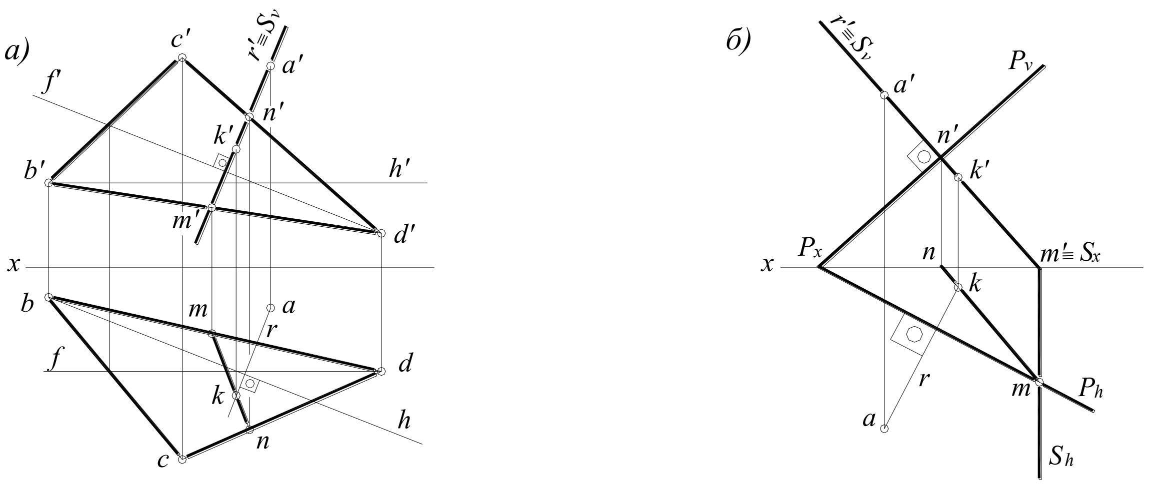


Рис. 1.39. Побудова перпендикуляра до площини

4) побудувати лінію перетину допоміжної і заданої площин ($S \cap P = MN$);

5) знайти точку зустрічі на перетині одержаної лінії із заданою прямою ($MN \cap r = K$).

Точка *К* і буде основою перпендикуляра.

Якщо площина задана слідами, то щоб опустити перпендикуляр із точки на площину (рис. 1.40, *б*), необхідно його проекції провести перпендикулярно відповідним слідам, тобто

$$r' \perp P_v, \quad r \perp P_h.$$

Пункти 2...5 такі самі, як і для попереднього випадку.

Якщо потрібно визначити відстань від точки до площини, то до виконаних вище п’яти пунктів додається ще один – побудова прямокутного трикутника, гіпотенуза якого і буде істинною відстанню.

Пряма, яка перпендикулярна до площини приватного положення, є прямою приватного положення. Однією із її проекцій є Н В, друга – паралельна осі *OX* (рис. 1.40).

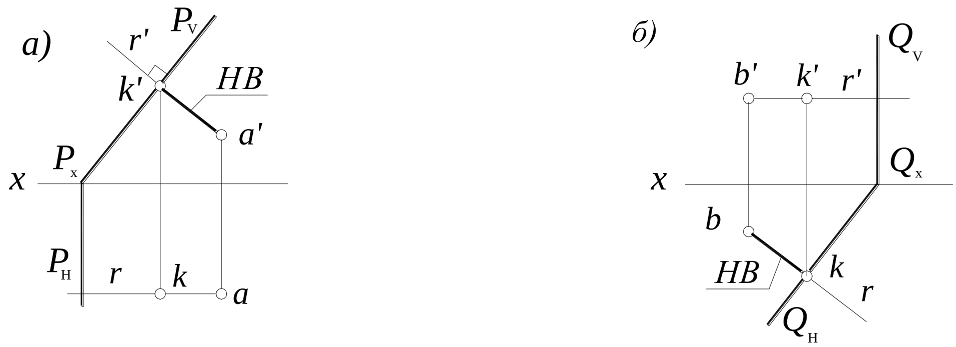


Рис. 1.40. Визначення відстані від точки до площини

Для того щоб із точки *А*, яка належить площині $P\ (h \cap f)$, підняти перпендикуляр *АВ* визначеної довжини необхідно:

1. Із точки *А* піднімають перпендикуляр довільної довжини $r \perp P\ (h \cap f)$, тобто $r' \perp f'$, а $r \perp f$.

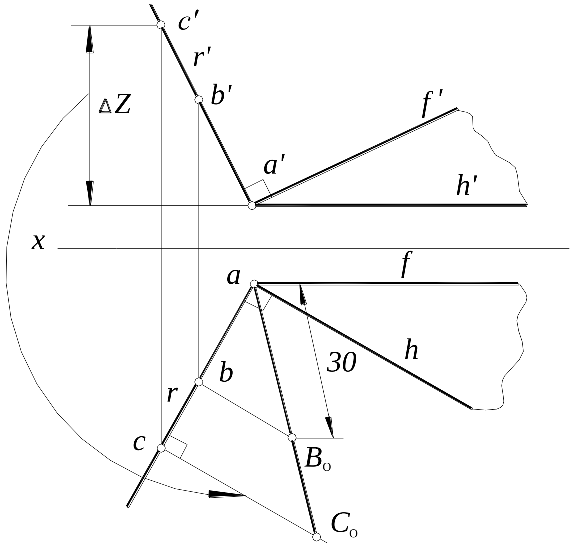


Рис. 1.41. Побудова перпендикуляра із точки, яка належить площині

2. На перпендикулярі довільно береться точка C і визначається її відстань від площини за допомогою прямокутного трикутника.

3. На гіпотенузі прямокутного трикутника $aC_о$, зображеній в натуральну величину, беруть точку $B_о$ на заданій відстані, наприклад, 30 *мм*.

4. Через точку $B_о$ проводять пряму $B_оb$ паралельно $C_оc$ й одержують горизонтальну проекцію точки B, за вертикальною лінією зв'язку знаходять b'.

На основі цієї задачі будують ***паралельні площини, які знаходяться на заданій відстані одна від одної.***

Щоб через точку A, провести площину $P\ (h \cap f)$ перпендикулярно прямій l (рис. 1.42, *а*), площина будується горизонталлю і фронталлю $P\ (h \cap f)$, які перетинаються, причому $f' \perp l'$; $h \perp l$.

На основі цієї задачі визначають ***відстань від точки до прямої загального положення***.

Для того щоб через точку A, провести слідами площину $P\ (P_V \cap P_H)$ перпендикулярно прямій l (рис. 1.42, *б*) необхідно:

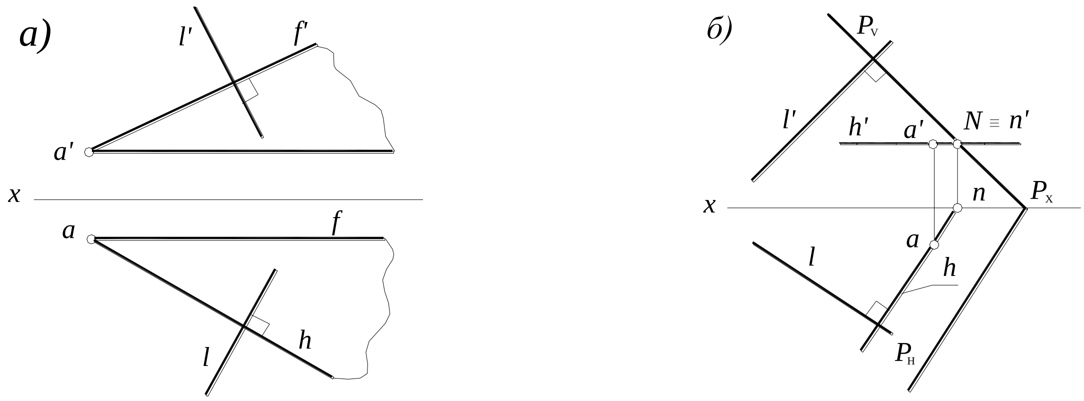


Рис. 1.42. Побудова площини перпендикулярно прямій

Через точку A проводять пряму горизонтального чи фронтального рівня перпендикулярно прямій l. Якщо проводять горизонталь, то її горизонтальна проекція перпендикулярна горизонтальній проекції прямої l, тобто $h \perp l$. Якщо проводять фронталь, то $f' \perp l'$. Потім для горизонталі будують фронтальний слід прямої, а для фронталі – горизонтальний слід, через які проводять сліди площини P (рис. 1.42, *б*), таким чином:

а) через точку A проводять горизонтальну пряму перпендикулярно прямій l, тобто

$$h \supset A; \quad h \perp l; \quad h' \parallel ox;$$

б) знаходять фронтальний слід цієї прямої, а саме:

$$h \cap V = N; \ (h \cap OX = n);$$

в) через фронтальний слід N проводять фронтальний слід площини Pv перпендикулярно прямій l, тобто $Pv \supset N; \quad Pv \perp l;$

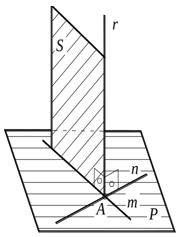
г) знаходять точку збігу слідів ($Pv \cap OX = Px$);

д) проводять горизонтальний слід площини ($Ph \supset Px; \ Ph \parallel h$).

8.2. Взаємно перпендикулярні площини

***Дві площини перпендикулярні між собою**, якщо одна з них проходить через пряму, яка перпендикулярна до другої площини* (рис. 1.43, *а*).

Через точку A (рис. 1.43, *б*) проведено площину $S(r \cap l)$ перпендикулярно площині P (ΔABC). Площина S задана прямою r, яка перпендикулярна площині P, тобто $r \perp h$, а $r' \perp f'$ і прямою l, яка проведена довільно. Таким чином, через точку A можна провести безліч площин, які перпендикулярні до площини P.



б)

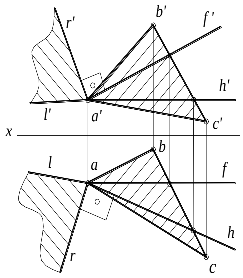


Рис. 1.43. Взаємно перпендикулярні площини

Для того щоб побудувати площину $Q(r \cap l)$ перпендикулярно площині $P(\Delta ABC)$

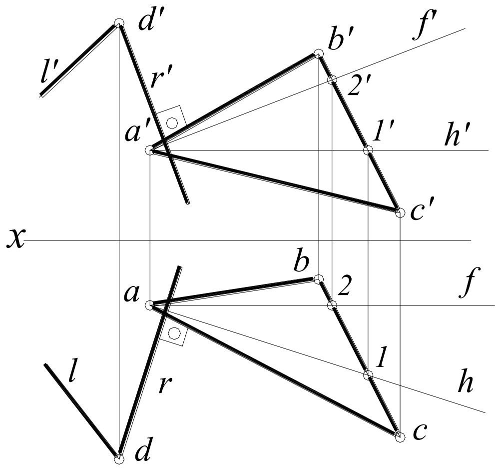


Рис. 1.44. Побудова взаємно перпендикулярних площин

через точку D побудову виконують у такій послідовності (рис. 1.44):

1) у площині проводять горизонтальну та фронтальну прямі;

2) із точки D опускають перпендикуляр на площину, тобто $r' \perp f'$, $r \perp h$;

3) через точку D проводять довільну пряму l, тобто задача має безліч розв’язків.

Таким чином, побудована площина $Q(r \cap l) \perp P(\Delta ABC)$.

ЛЕКЦІЯ № 9.

Тема: Поверхні. Лінії та поверхні. Побудова точок на поверхнях. Перетин многогранників площиною. Побудова розгорток.

9.1. Криві лінії та поверхні

З позиції геометрії багато з того**,** що оточують нас у житті, – ***лінії*** та ***поверхні*** простих і складних форм.

Криву лінію розглядають як наслідок постійного переміщення точки у просторі (рис. 1.51, *а*). Криві лінії поділяться на плоскі й просторові. У першому випадку усі точки кривої належать якійсь площині, а в другому – не належать. Проекція кола – це коло або еліпс; проекція параболи – парабола, проекція гіперболи – гіпербола. Крива лінія називається ***закономірною,*** якщо відомий математичний закон її утворення. Якщо крива задана кінцевим числом точок, вона називається лінією, що задана каркасом, або ***каркасною***. Криві лінії, які задані своїми проекціями і не відповідають будь-якому відомому математичному закону, називаються ***графічними.***

У нарисній геометрії при розв’язуванні задач використовують тільки графічний спосіб.

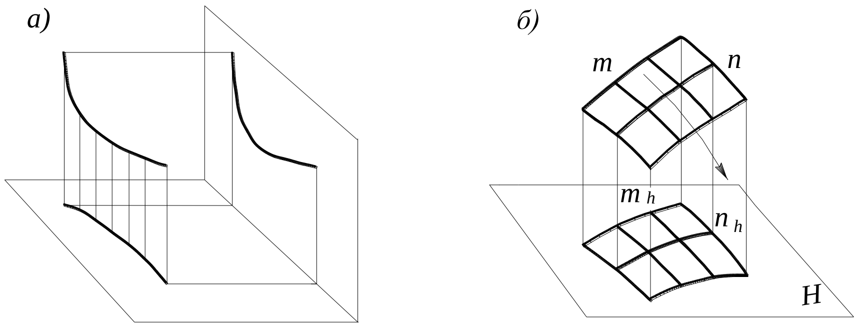


Рис. 1.51. Проекції кривої та поверхні на площині

Крива поверхня може бути визначена як сукупність послідовних переміщень *твірної* лінії ***m***, що рухається по *напрямній* лінії ***n*** (рис. 1.51, *б*, 1.52, *а*). Сукупність цих ліній називають *каркасом поверхні*. За типом твірної визначають саму поверхню, наприклад: еліпсоїд, параболоїд та ін.

Залежно від *твірної* поверхні поділяться на *лінійчасті* (твірна – пряма лінія), наприклад: циліндр, конус, і *нелінійчасті*, наприклад: сфера, тор.

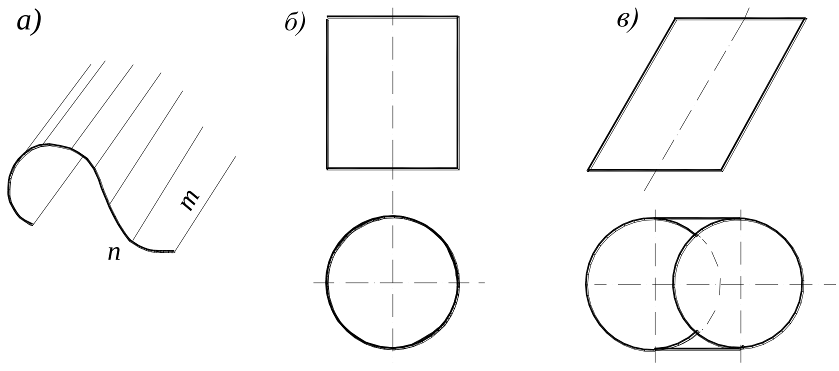


Рис. 1.52. Проекції прямого (*б*) і похилого (*в*) циліндрів

Поверхні обертання одержують рухом навколо осі якоїсь твірної кривої (рис. 1.52, *а*) або прямої лінії (рис. 1.52, *б, в*) . У конструкціях часто використовуються такі поверхні як циліндр, конус, сфера, тор.

Циліндр одержують при переміщенні твірної ***m*** паралельно самій собі по напрямній кривій ***n*** (рис. 1.52, *а*). Якщо твірна являє собою коло, то одержують круговий циліндр (рис. 1.52).

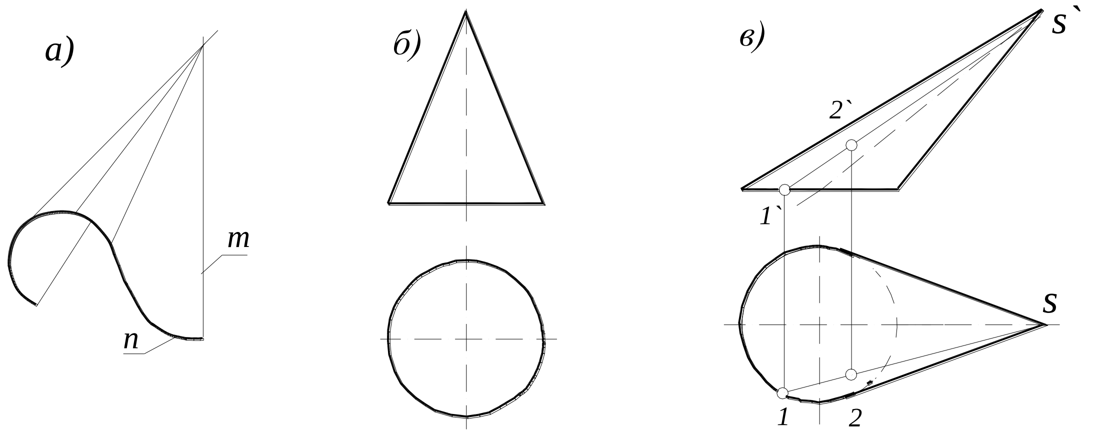


Рис. 1.53. Проекції конуса

Конус одержують при переміщенні прямої твірної ***m*** навколо нерухомої точки ***S*** по напрямній кривій ***n*** (рис. 1.53, *а*). Якщо напрямна являє собою коло, то одержують кругові конуси: прямий (рис. 1.53, *б*) і похилий (рис. 1.53, *в*).

Сферу (рис. 1.54) одержують обертанням кола навколо його діаметра.

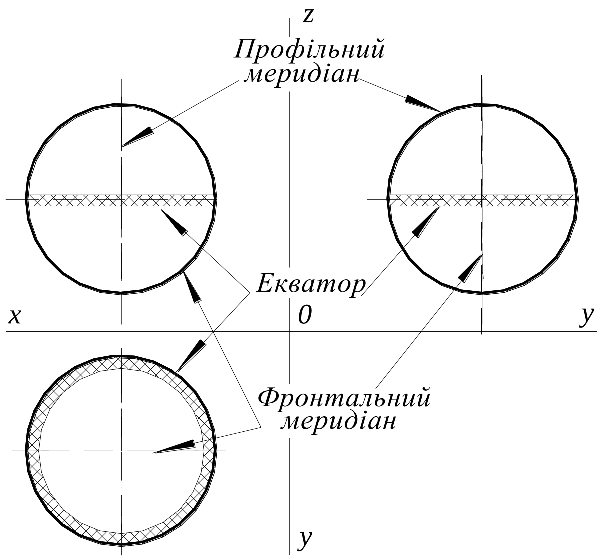


Рис. 1.54. Проекції сфери

9.2. Побудова точок на поверхнях

Точки на поверхнях будують за допомогою допоміжних січних площин або допоміжних прямих.

Якщо поверхні займають проекційне положення, то побудова спрощується. Точка, яка належить проеціюючій поверхні прямого циліндра (рис. 1.55, *а*), проеціюється на коло, що є проекцією циліндра таким чином: на нижню половину кола, якщо точка видима (точка *A*), і на верхню половину, якщо точка невидима (точка *B* береться у дужки на фронтальній і профільній проекціях). Профільні проекції *a*" і *b*" точок визначають за допомогою координат Y_A і Y_B відносно осей симетрії: a'' – праворуч від осі, b''– ліворуч; b''– невидима (позначається у дужках), тому що знаходиться на задній половині поверхні циліндра.

Точки на поверхні прямого конуса (рис. 1.55, *б*) знаходять за допомогою *кола*, яке утворюється внаслідок проходження січної площини *P* через задану точку *A,* або за допомогою твірної прямої, яка проходить через точку *B,* (у даному прикладі вона невидима).

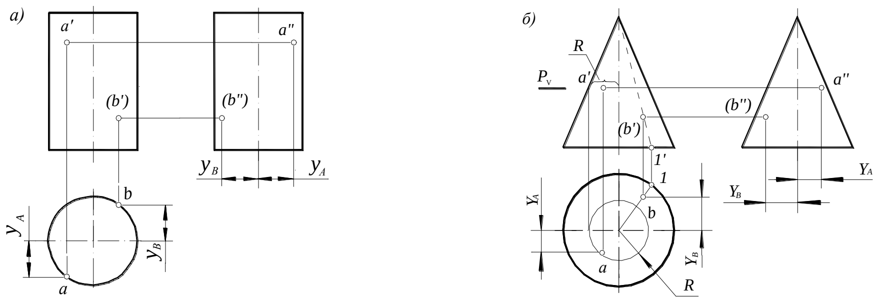


Рис. 1.55. Побудова точок на поверхні циліндра і конуса

Коло, яке проходить через задану точку *A* і розташоване у площині *P*, що перпендикулярна осі конуса, проеціюється на фронтальну і профільну проекції у вигляді прямої, а на горизонтальну проекцію – у вигляді кола радіусом *R*. Оскільки точка *A* на фронтальній проекції видима, на горизонтальній проекції вона буде розташована у нижній частині конуса. Профільну проекцію a'' точки будують за координатою Y_A, яка розташована праворуч від осі симетрії. Профільна проекція a'' точки видима, тому що розташована на передній поверхні конуса. Через фронтальну проекцію b' точки проводять твірну лінію.

Горизонтальну проекцію твірної прямої визначають за допомогою точки *1* на основі конуса. Оскільки фронтальна проекція b' точки невидима (у дужках), то пряма для її побудови повинна бути розташована на горизонтальній площині проекції у верхній від осі симетрії частині конуса. Профільну проекцію b'' точки будують за двома її проекціями b' і b та координатою Y_B .

Точки на поверхні піраміди (рис. 1.56) знаходять так само, як і на поверхні конуса. Побудова буде відрізнятися тільки тим, що січна площина *P*, яка проходить через точку A, утворює не коло, а фігуру, що знаходиться в основі піраміди (на рис. 1.56 – квадрат).

Точки на поверхні сфери (рис. 1.57) будують за допомогою *кола*, яке отримують січною площиною *P*, що проходить через задані точки. Якщо січне коло розташоване перпендикулярно осі сфери, то в цьому випадку воно проеціюється у пряму або коло. Горизонтальну проекцію *a* точки, що лежить на сфері, будують на горизонтальній проекції за допомогою кола радіусом *R* і одержують проекцію *a* на нижній половині горизонтальної проекції сфери (проекція

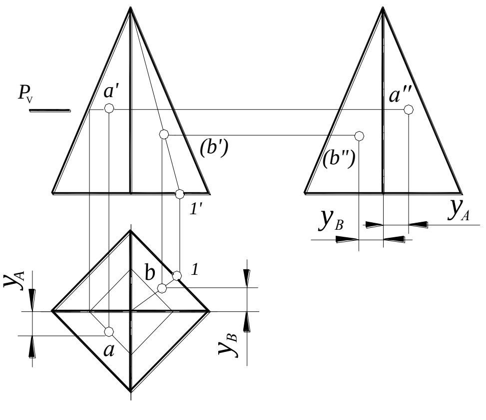


Рис..1.56. Побудова точок на поверхні

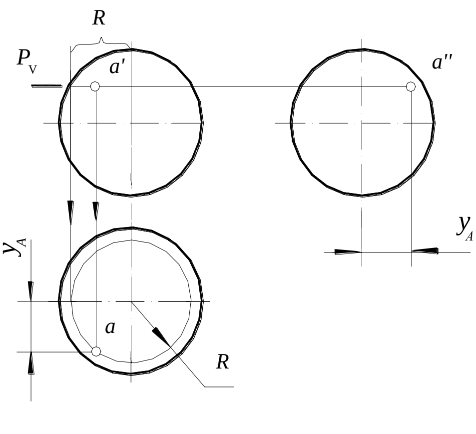


Рис..1.57. Побудова точок на поверхні

а' точки видима). Профільну проекцію *а"* точки будують за двома її проекціям *а* і *а'* та координатою Y_A..

9.3. Перетин багатогранника площиною

Багатогранником, або багатогранною поверхнею, називають поверхню, яка складається з плоских багатокутників, що прилягають один до одного і не лежать в одній площині. Багатокутники називають гранями поверхні, а їхні сторони – ребрами.

При ***перетині*** геометричних тіл площиною утворюється плоска фігура, яка називається перерізом.

Контур перерізу багатогранника є багатокутником (рис. 1.58), вершини якого розташовані на ребрах багатогранника (оскільки вони є точками перетину ребер з січною площиною), а сторони − на його гранях (оскільки вони є лініями перетину граней із січною площиною).

Із цього визначення випливає два способи побудови фігури перерізу.

Перший спосіб

Будують точки перетину ребер багатогранника з січною площиною і послідовно їх з'єднують, одержуючи контур перерізу.

Другий спосіб.

Будують лінію перетину граней багатогранника з січною площиною, тобто одержують сторони контуру перетину.

Розглянемо обидва способи на такій задачі:

Побудувати переріз прямої трикутної призми площиною *Р*.

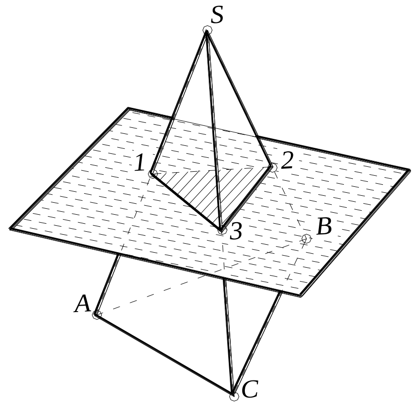


Рис. 1.58. Перетин піраміди площиною загального положення

Перший спосіб (рис. 1.59, *а*).

Знаходять точки перетинання бокових ребер призми з площиною *Р*, для цього проводять через ребра допоміжні площини S_1, S_2, S_3 паралельно площині проекцій *V*. Ці площини перетинають площину *Р* по фронталях, на яких і будуть розташовані точки перетину *A, B, C* бокових ребер призми з площиною *Р*. З'єднавши ці точки, отримують контур перерізу (*Δ ABC*).

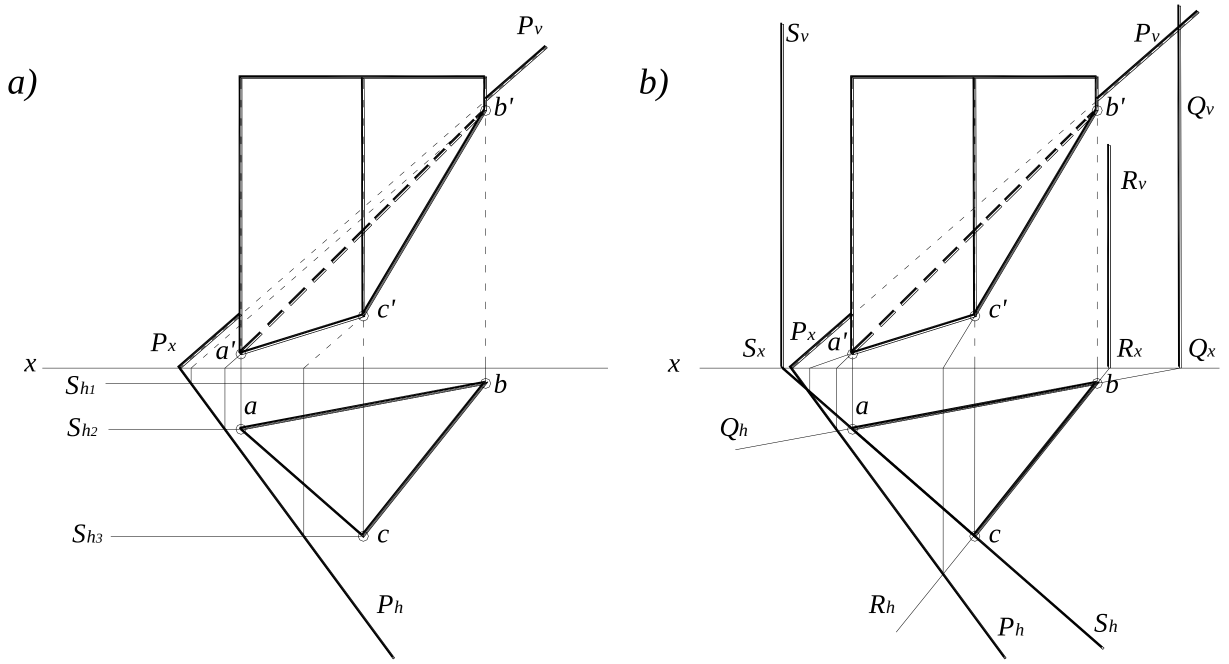


Рис. 1.59. Перетин трикутної призми площиною загального положення

Другий спосіб (рис. 1.59, *б*). Проведемо через грані призми допоміжні горизонтально проеціюючі площини Q, R і S, які перетинаються з площиною P по прямих лініях. Відрізки цих прямих, які розташовані на гранях призми, будуть лініями перетину граней з площиною P, таким чином вони утворюють шуканий контур перетину ($\Delta\, ABC$).

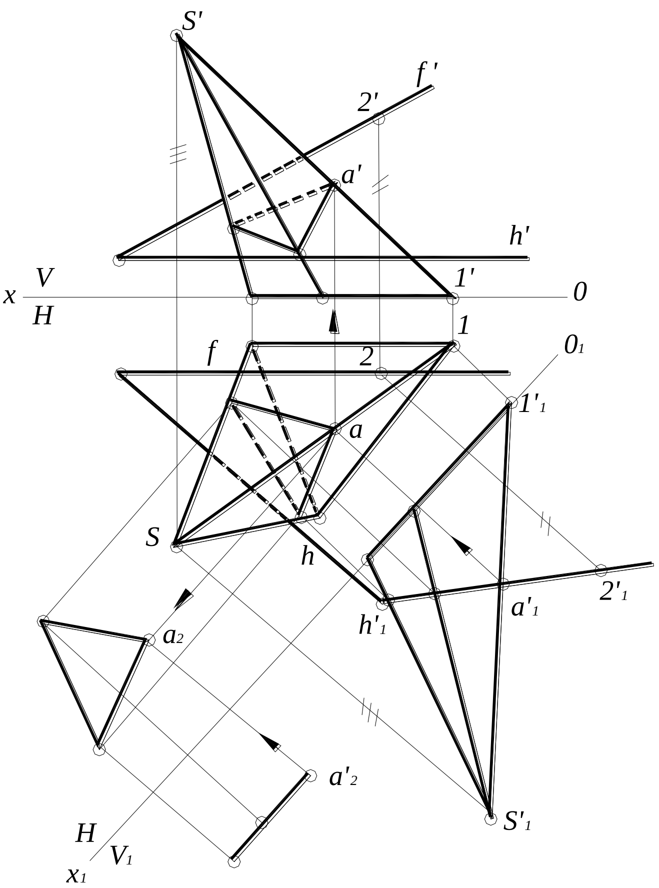


Рис. 1.60. Перетинання піраміди площиною

У тих випадках, коли січна площина не паралельна жодній із площин проекцій, фігура перетину проеціюється спотворено. Тому, якщо потрібно визначити натуральну величину фігури перетину, то треба використовувати один із способів перетворення комплексного креслення (див. лекцію 9).

Побудувати проекції та визначити натуральну величину перетину піраміди площиною $P(h \cap f)$ загального положення (рис. 1.60) необхідно:

Замінивши площину проекцій так, щоб у новій системі січна площина P загального положення стала проеціюючою, можна побудувати лінію перетину піраміди без допоміжних січних площин, а потім добутий результат перенести на вихідні проекції.

1. Заміняють площину проекцій V на $V_1 \perp P$. Для цього проводять нову вісь проекцій $X_1O_1 \perp h$ і будують нову фронтальну проекцію $h'_1 - 2'_1$ сліду площини P. Після цього будують нову фронтальну проекцію піраміди. На рис. 1.65 показано побудову вершини S'_1 та ребра $1'_1 - S'_1$.

2. Будують допоміжну проекцію лінії перетину піраміди площиною. Нова фронтальна проекція цієї лінії є прямою, що збігається зі слідом площини $h'_1 - 2'_1$, тому що $P \perp V_1$. Точки перетину сліду площини P ($h'_1 - 2'_1$) з проекціями ребер [наприклад $P\,(h'_1 - 2'_1) \cap S'_1 - 1'_1 = a'_1$] є допоміжними проекціями вершин лінії перетину.

3. Будують проекції лінії перетину. Для цього, провівши лінію зв'язку $a'_1a \perp x_1o_1$ до перетину з горизонтальною проекцією ребра $S - 1$, одержують горизонтальну проекцію a вершини лінії перетину; фронтальна проекція a' побудована як звичайно. Аналогічно побудовані й інші точки шуканої лінії перетину.

4. Натуральна величина перерізу визначена способом плоскопаралельного переміщення. Ці побудови виконані в системі $H \perp V_1$ і зрозумілі з рис. 1.60.

Розглянутий приклад свідчить також про можливість комплексного використання декількох способів перетворення комплексного креслення.

9.4. Розгортки поверхонь

Розгорткою поверхні називається плоска фігура, одержана способом суміщення усієї поверхні з площиною проекцій.

Поверхні розподіляються на такі, що розгортаються (поверхні багатогранників, циліндричні, конічні), і такі, що не розгортаються (торові, кульові).

Для побудови розгортки необхідно визначити натуральну величину всіх елементів поверхонь.

Розгортку багатогранників виконують способом послідовної побудови натуральної величини граней та основи.

Побудову розгортки багатогранників розглянемо на прикладах.

Похилу тригранну піраміду перетинає фронталь-нопроеціюючою площиною *P* (рис. 1.61).

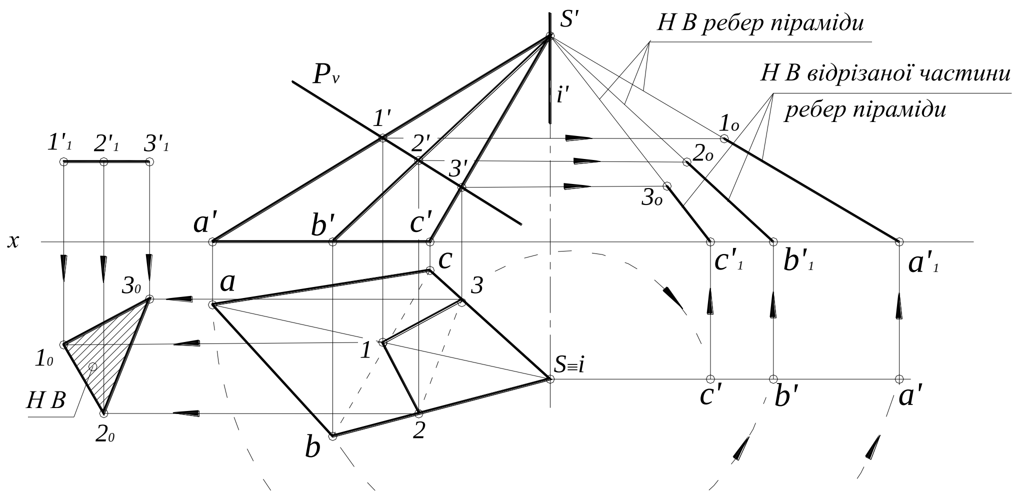


Рис. 1.61. Перетин піраміди площиною

Побудувати проекцію перетину; натуральну величину перетину і повну розгортку зрізаної частини поверхні піраміди.

1. Визначають точки перетину (зустрічі) ребер піраміди з січною площиною *P* і оскільки площина *P* проеціююча, то вона одразу дає фронтальні проекції точок перетину площини *P* з ребрами піраміди *1′, 2′, 3′*.

2. За вертикальними лініями зв’язку будують горизонтальну проекцію фігури перетину (*Δ1, 2, 3*).

3. Способом плоскопаралельного переміщення визначають натуральну величину трикутника *1 ,2, 3*.

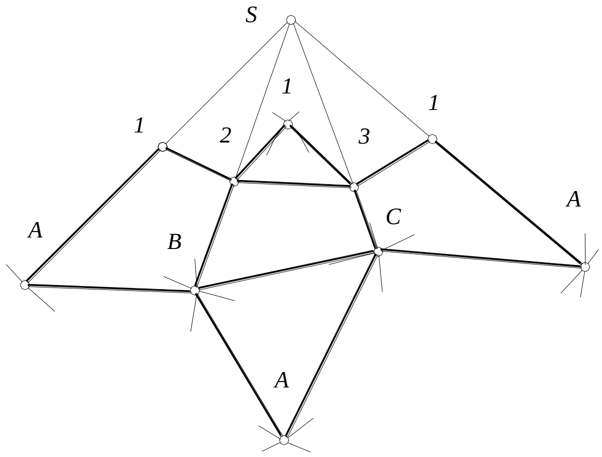


Рис. 1.62. Повна розгортка піраміди

4. Для побудови повної розгортки піраміди визначають натуральну величину кожного ребра будь-яким способом перетворення комплексного креслення, але найбільш раціонально це можна зробити способом обертання навколо проеціюючих прямих, у даному випадку навколо прямої, перпендикулярної до горизонтальної площини проекцій.

5. Для побудови розгортки (рис. 1.62) проводять довільну пряму, на якій відкладають натуральну величину будь-якого ребра (у нашому випадку *SA*).

6. Послідовно методом зарубок за трьома сторонами будують розгортку бічної поверхні піраміди.

7. Добудовують основу й перетин до бічної поверхні піраміди.

ЛЕКЦІЯ №10

Тема: Перетин кривих поверхонь площиною.

10.1. Перетин кривої поверхні площиною

Перетин кривої поверхні площиною може бути побудований за допомогою допоміжних площин, які перетинають поверхню по якихось кривих лініях, а січну площину − по прямих. Точки перетину перших і других ліній, які є загальними для заданої поверхні й січної площини, визначають шуканий переріз.

Допоміжні січні площини потрібно вибирати так, щоб вони перетинали поверхню по найбільш простих лініях.

У першу чергу визначають опорні точки: точки на окреслюваних твірних, вищу і нижчу точки перетину, точки найближчі та найбільш віддалені від площин проекцій.

Циліндр обертання

При перетині циліндра обертання площиною можуть бути отримані такі лінії та фігури:

1) ***прямокутник*** або дві прямі, паралельні осі циліндра (твірні циліндра), якщо площина перетинає циліндр паралельно його осі;

2) ***еліпс***, якщо січна площина нахилена до осі циліндра (рис. 1.63) ;

3) ***коло***, якщо січна площина перпендикулярна до осі циліндра.

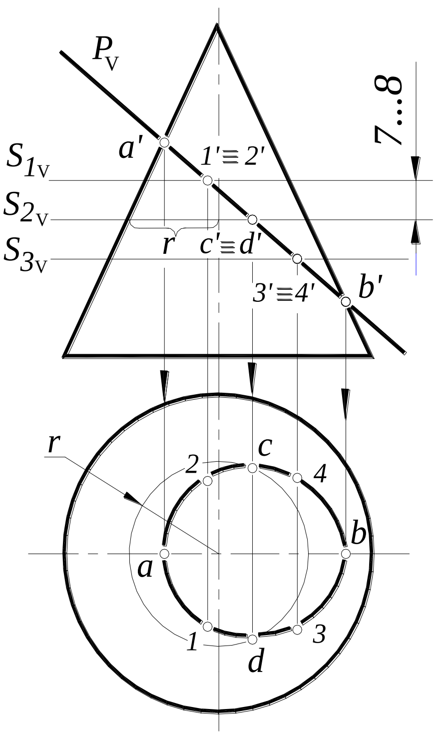


Рис. 1.63. Перетин конуса обертання площиною

Конус обертання

При перетині конуса обертання площиною можуть бути отримані такі фігури:

1) ***трикутник,*** якщо січна площина перетинає конус через його вершину;

2) ***еліпс,*** якщо січна площина нахилена до осі конуса і перетинає усі його твірні;

3) ***коло***, якщо січна площина перпендикулярна до осі конуса;

4) ***парабола,*** якщо січна площина паралельна будь-якій одній твірній конуса;

5) ***гіпербола,*** якщо січна площина паралельна осі конуса.

Побудову перетину кривої поверхні розглянемо на прикладі перетину конуса обертання фронтально проеціюючою площиною (рис. 1.63). У перетині буде еліпс з осями *AB* і *CD*. Горизонтальні проекції точок *A* і *B* знаходяться на вертикальних лініях зв'язку з їх фронтальними проекціями. Побудову точок *C*, *D* і проміжних 1, 2, 3, 4 виконують за допомогою січних площин горизонтального рівня S_{1v}, S_{2v} і S_{3v}.

10.2. Розгортки поверхонь

Побудувати проекцію перетину циліндра фронтально-проціюючою площиною P (рис. 1.64), натуральну величину перетину і повну розгортку зрізаної частини поверхні циліндра.

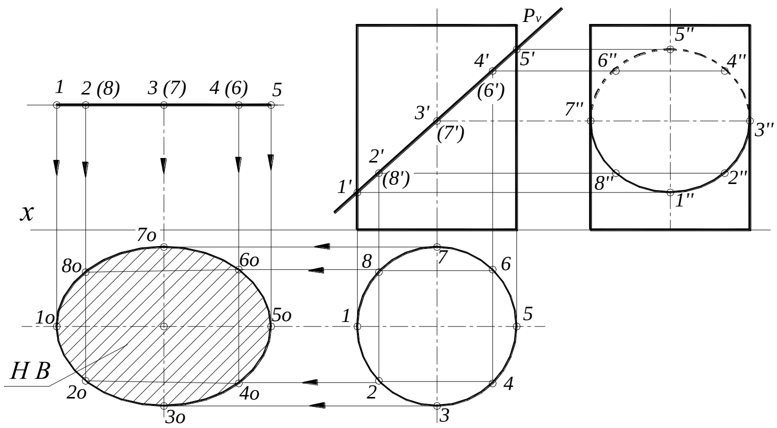


Рис. 1.64. Перетинання циліндра площиною

1. Фігура перетину – це еліпс, мала вісь якого дорівнює діаметру циліндра, а величина великої осі залежить від кута між січною площиною і віссю циліндра.

2. Для побудови точок контуру перетину проводять рівномірно розташовані твірні, тобто такі, проекції яких на площині H є точками, що розташовані одна від одної на однаковій відстані. Цією “розміткою” зручно користуватися не тільки для побудови проекцій перетину, але й для побудови розгортки бічної поверхні циліндра (рис. 1.85).

3. Натуральна величина перетину еліпса будується способом плоско-паралельного переміщення.

4. Розгорнута бічна поверхня циліндра розділена на рівні між собою відрізки. Кінці цих відрізків відповідають точкам еліпса.

5. До розгортки бічної поверхні (рис. 1.65) приєднані: коло основи та еліпс − натуральна величина перетину.

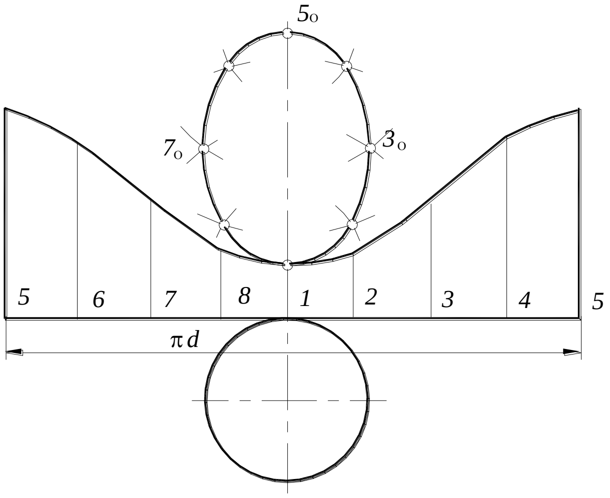


Рис. 1.65. Повна розгортка зрізаної частини поверхні циліндра

Побудувати проекцію перетину прямий круговий конус, який перетинається фронтальнопроеціюючою площиною P (рис. 1.66)., натуральну величину перетину і повну розгортку зрізаної частини поверхні конуса:

1. Коло основи конуса ділять на дванадцять рівних частин і через ці точки проводять відповідно дванадцять твірних конуса.

2. При перетинанні фронтальнопроеціюючої площини *P* з твірними одержують фронтальні проекції *a', b', c', d', e', f', k', l', m', n',r', j'* точок фігури перетину.

3. На перетинанні вертикальних ліній зв'язку з горизонтальними проекціями твірних будують горизонтальну проекцію еліпса (рис. 1.66).

4. Натуральна величина перетину еліпса будується способом плоско-паралельного переміщення .

5. Розгорткою бічної поверхні прямого кругового конуса, як відомо, є сектор, радіус якого дорівнює довжині твірної конуса, а центральний кут визначається за формулою

$$\alpha = 2\pi r / l,$$

де r – радіус кола основи конуса, *l* – довжина твірної.

6. Після побудови розгортки бічної поверхні конуса, яка є круговим сектором цього конуса $S_o0_o12_o$ (рис. 1.67), у якого радіус дорівнює довжині твірної конуса, наносять на розгортку криву $A_oB_oC_oD_oE_oF_oK_oL_oM_oN_oR_oJ_oA_o$, що є розгорткою еліпса перетину.

7. Точки *A* і *K* належать крайнім твірним конуса. Оскільки ці твірні проеціюються на площину *V* у натуральну величину, ці точки знаходять на розгортці, для цього відкладають від точки S_o на прямих S_o0_o і S_o12_o відрізок, який дорівнює *s'a'*, а на прямій S_o6_o – відрізок, який дорівнює *s'k'*.

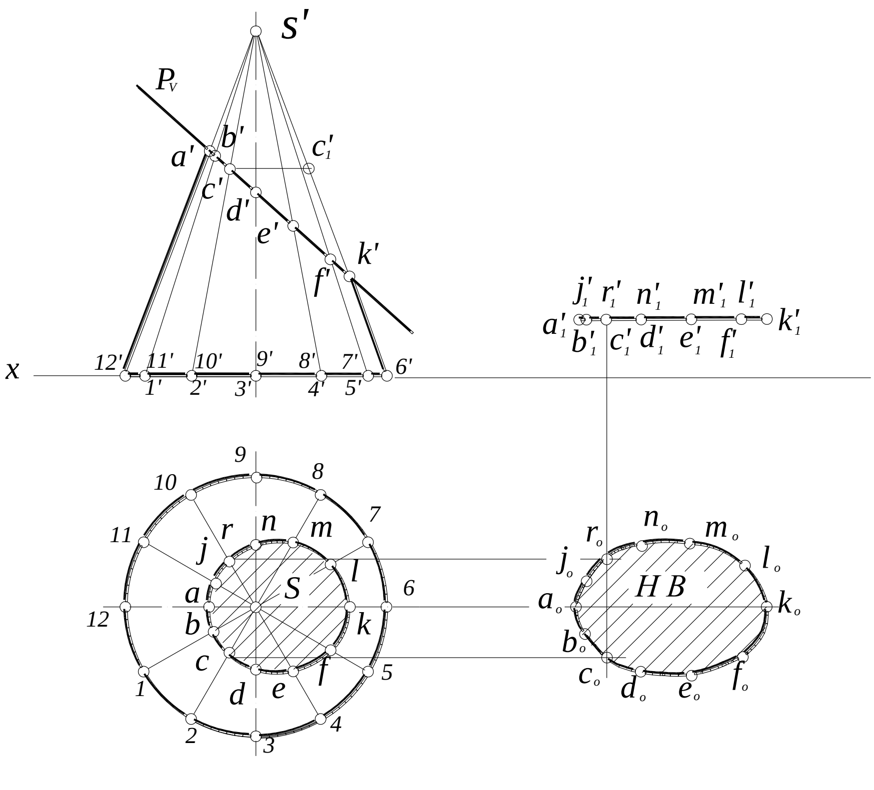


Рис. 1.66. Перетин конуса площиною

8. Для визначення відстаней від інших точок еліпса до вершини *S* проводять через їх фронтальні проекції прямі, паралельні осі *OX*, до перетинання з однією із крайніх твірних конуса, що відповідає обертанню цих твірних до положення, паралельного площині *V* (на рис. 1.67 це показано тільки для точки *c'*). Відкладають ці відстані від S_o відповідно на прямих S_o1_o, S_o2_o та ін., одержують на кожній із твірних точку. Проводять через ці точки на розгортці лекальну криву, одержують розгорнутий перетин конуса площиною *P*.

9. До розгортки бічної поверхні конуса (рис. 1.67) приєднані: коло основи й еліпс − натуральна величина перетину.

Натуральну величину перетину переносять з рис. 1.66, для цього заміряють відстань між точками $a_o k_o$ (рис. 1.66), а відрізок $a_o k_o$ розміщують вертикально на рис. 1.67 так, точки K_o і k_o збігались. Інші точки перетину будують послідовно методом зарубок за трьома точками.

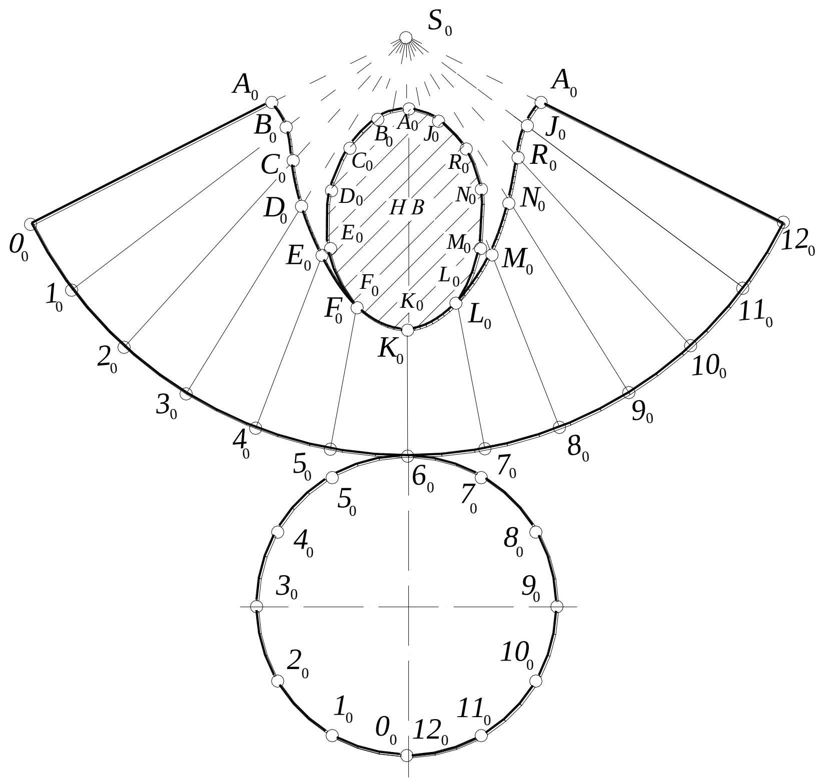


Рис. 1.67. Повна розгортка зрізаної частини поверхні конуса

ЛЕКЦІЯ № 11.

Тема*: *Перетин прямої з поверхнями.

11.1. ПЕРЕТИН ПОВЕРХНІ ПРЯМОЮ ЛІНІЄЮ

Загальний спосіб побудови точок перетину прямої лінії з поверхнею складається з трьох етапів (рис. 1.68, *а*):

1) проводять через пряму допоміжну площину;

2) будують фігуру перетину заданої поверхні з допоміжною площиною;

3) визначають точки перетину заданої прямої з фігурою перетину.

Допоміжну площину вибирають так, щоб при перетині з поверхнею утворювались прості фігури перетину (кола, прямокутники).

Якщо пряма перетинає багатогранник або кулю, то через неї проводять проеціюючу допоміжну площину.

Щоб допоміжна площина розсікала поверхню циліндра по твірних, вона повинна проходити через пряму, паралельну твірним циліндра.

Кількість точок перетину прямої з поверхнею залежить від складності обрису поверхні. При перетині прямої з поверхнями простих геометричних тіл (призми, циліндра, кулі та ін.) одержують у загальному випадку дві точки, одну з яких називають *точкою входу*, а другу – *точкою виходу*.

У випадку, коли поверхня, з якою перетинається пряма, або пряма є проеціюючими, то побудова спрощується, тобто точки перетину визначаються просто. Так, наприклад, точки K і L перетину прямої DE з боковими гранями трикутної прямої призми ABC (рис. 1.68, *а*) проеціюються на площину H у точки k і l перетину горизонтальних проекцій двох передніх граней призми з проекцією de прямої DE. За горизонтальними проекціями k і l, використовуючи лінії проекційного зв'язку, знаходять фронтальні проекції k' і l' точок K і L.

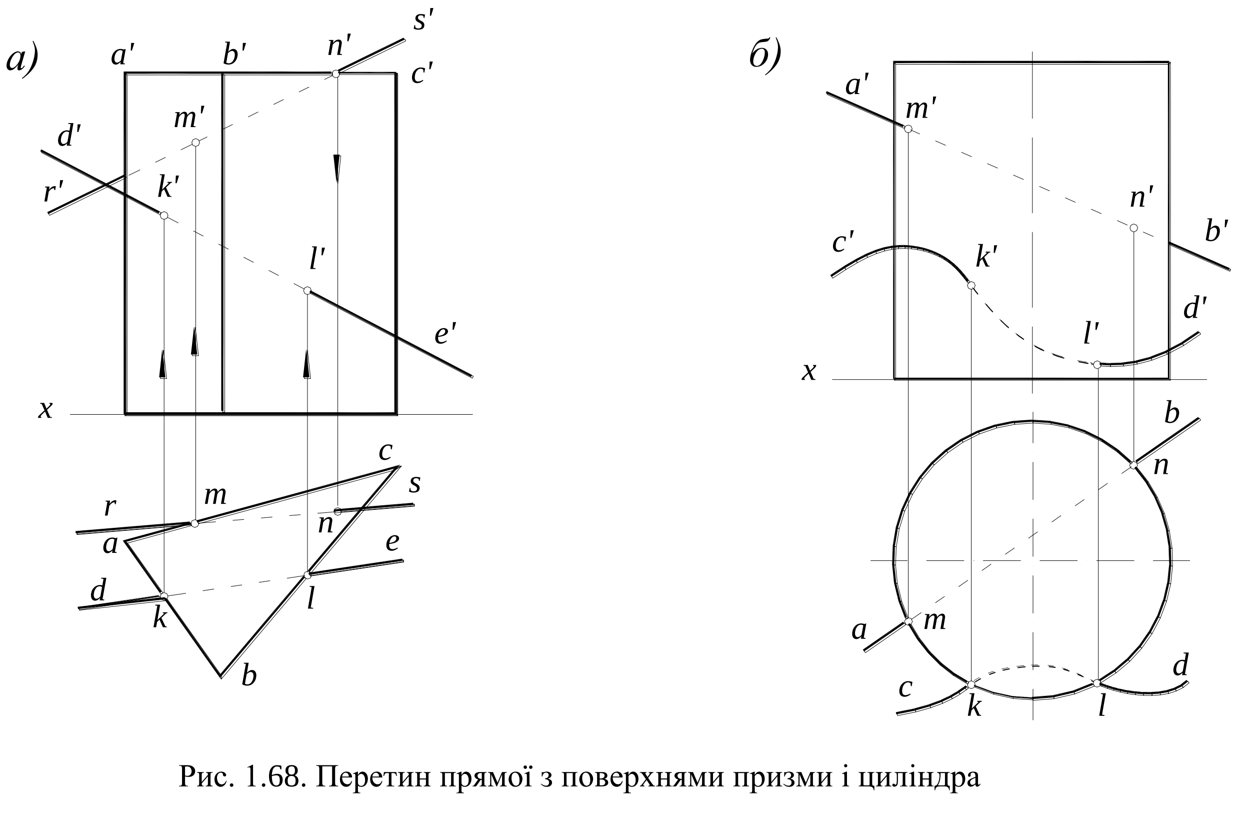


Рис. 1.68. Перетин прямої з поверхнями призми і циліндра

На рис. 1.68, *а* показано також побудову точок *M* і *N* перетину прямої *RS* з поверхнею призми, причому точка *M* належить задній бічній грані, а точка *N* – верхній основі призми. Порядок побудови проекцій цих точок показаний стрілками.

Просто будуються і точки перетину прямої з поверхнею прямого циліндра, вісь якого перпендикулярна до площини проекцій *H* (рис. 1.68, *б*).

Необхідно звернути увагу на те, що при перетині таких поверхонь як пряма призма або прямий циліндр кривими лініями побудову точок перетину виконують також просто. На рис. 1.68, *б* зображено просторову криву *CD,* яка перетинає поверхню циліндра. Горизонтальні проекції *k* і *l* точок *K* і *L* перетину цієї кривої з поверхнею циліндра є точками перетину *cd* з колом, яке є горизонтальною проекцією бічної частини циліндра, а фронтальні проекції *k'* і *l'* визначають на перетині лінії зв'язку з фронтальною проекцією *c'd'* кривої *CD.*

На рис. 1.69 показано точки перетину проеціюючої прямої з поверхнею конуса. Оскільки пряма *l* є горизонтально-проеціюючою, то горизонтальні проекції точок входу й виходу збігаються із горизонтальною проекцією прямої. Фронтальна проекція точки *N* знаходиться на основі конуса, фронтальну проекцію точки *K* визначають за допомогою прямої *m,* горизонтальну проекцію якої проводять через вершину конуса та горизонтальні проекції точок *N, K* і прямої *l.* Пряма *m* перетинає основу конуса у точці *1,* через фронтальну проекцію точки *1* проводять фронтальну проекцію прямої *m.* Перетин фронтальних проекцій прямих *m* і *l* визначає фронтальну проекцію *k'* точки.

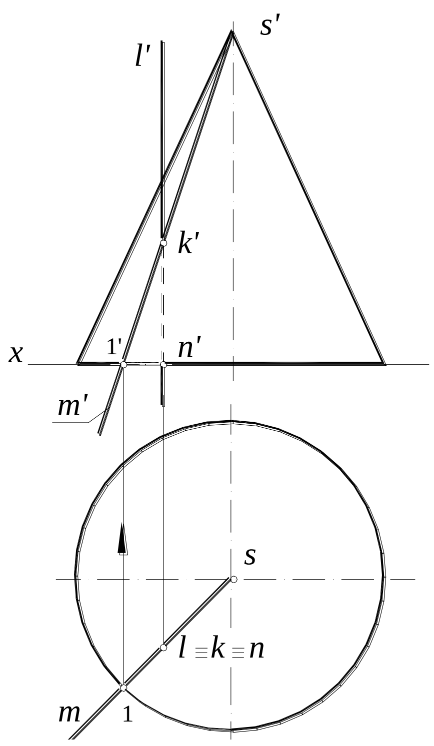


Рис. 1.69. Перетин проеціюючої прямої з поверхнею конуса

Розглянемо побудову точок перетину прямої *l* з поверхнею трикутної піраміди *SABC* (рис. 1.90, *а*) і поверхнею прямого кругового конуса (рис. 1.70, *б*).

Через пряму *l* (рис. 1.70, *а*) проводять допоміжну фронтально-проеціюючу площину P_V. Ця площина перетинає бічну поверхню піраміди з утворенням трикутника *1', 2', 3'.*

За лініями проекційного зв'язку будують горизонтальну проекцію трикутника *1, 2, 3.* Визначають горизонтальні проекції точок *n* і *k* перетину прямої *l* з горизонтальною проекцією трикутника *1, 2, 3.* За лініями проекційного зв'язку будують фронтальні проекції точок *N* і *K* (рис. 1.90, *б*). Видимість прямої відносно поверхні піраміди визначають способом конкуруючих точок.

Щоб допоміжна площина розсікала поверхню конуса по твірних, вона повинна проходити через пряму *l* і вершину конуса (рис. 1.70, *б*). Для побудови такої площини на прямій *l* беруть точку *A*. Через вершину конуса *S* і точку *A* проводять пряму *c* і будують горизонтальні сліди M_1 і M_2 прямих *l* і *c*. З'єднавши сліди M_1 і M_2, одержують горизонтальний слід січної площини, який розсікає основу конуса за точками *1* і *2,* тобто одержують фігуру перетину – трикутник *1, S, 2.*

Визначають горизонтальні проекції *n* і *k* точок перетину прямої *l* з горизонтальною проекцією трикутника *1, S, 2.* За лініями проекційного зв'язку будують фронтальні проекції точок *N* і *K.*

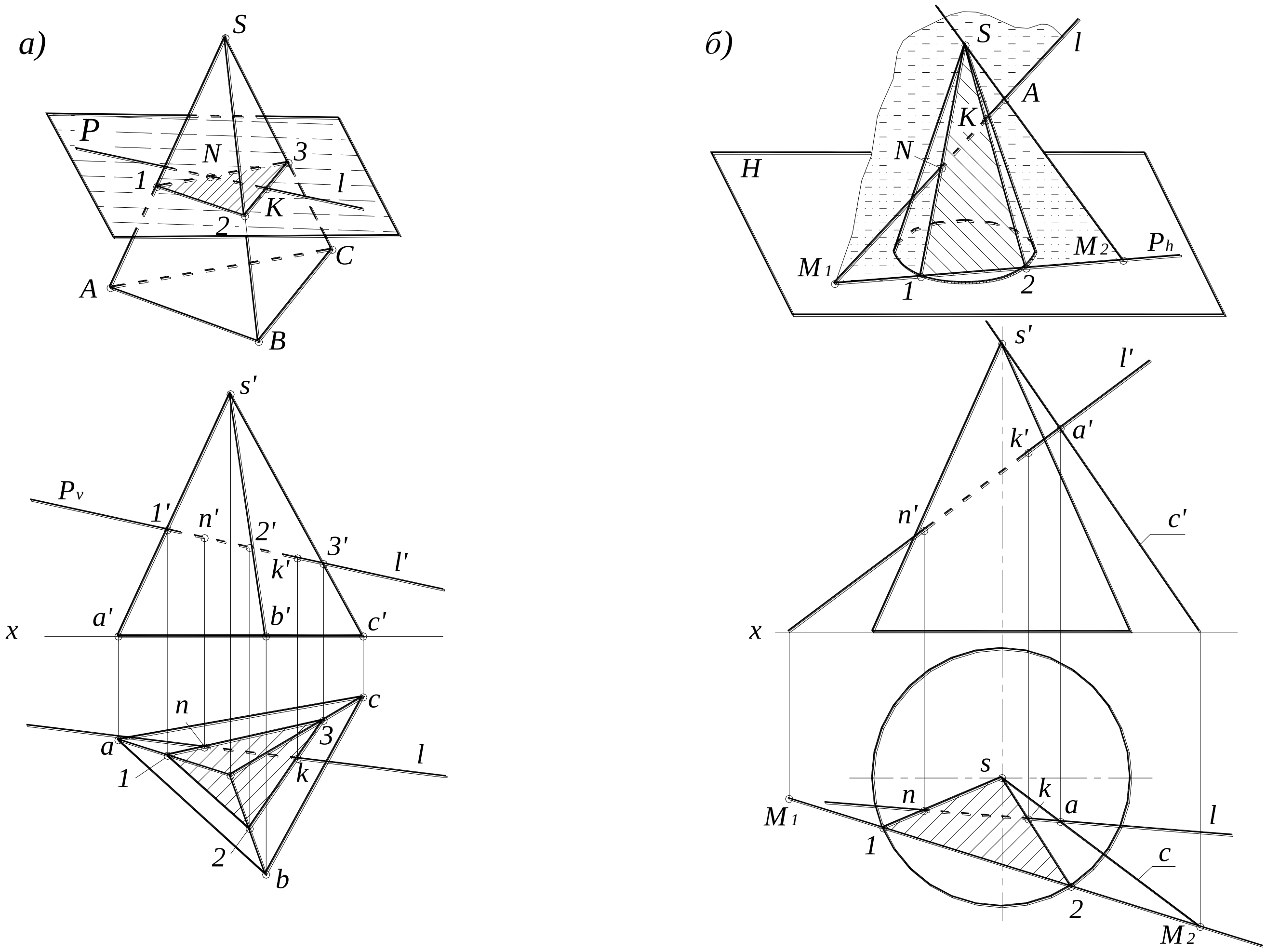


Рис. 1.70. Перетин прямої з поверхнями піраміди і конуса

ЛЕКЦІЯ № 12-13

Тема: Взаємний перетинбагатогранників і кривих поверхонь

12. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН БАГАТОГРАННИКІВ І КРИВИХ ПОВЕРХОНЬ

Побудову точок лінії взаємного перетину поверхонь виконують різними допоміжними засобами: проеціюючими площинами, площинами загального положення, а також допоміжними січними сферами. Вибір допоміжних засобів визначається формою і положенням поверхонь, які перетинаються.

Перетин поверхонь може бути повний і неповний.

При *повному перетині* поверхонь отримують дві лінії взаємного перетину, а при *неповному* – тільки одну ламану або плавну криву.

12.1. Перетин багатогранних поверхонь

Лінія перетину багатогранників визначається побудовою точок перетину ребер одного багатогранника з гранями другого і ребер другого з гранями першого. Внаслідок цього буде одна або дві просторові ламані лінії.

Розглянемо побудову точок лінії перетину поверхонь трикутної призми і піраміди *SABC* (рис. 1.71).

Для розв’язування цієї задачі ребра призми поміщують у фронтальнопроеціюючі площини *P, Q, R*.

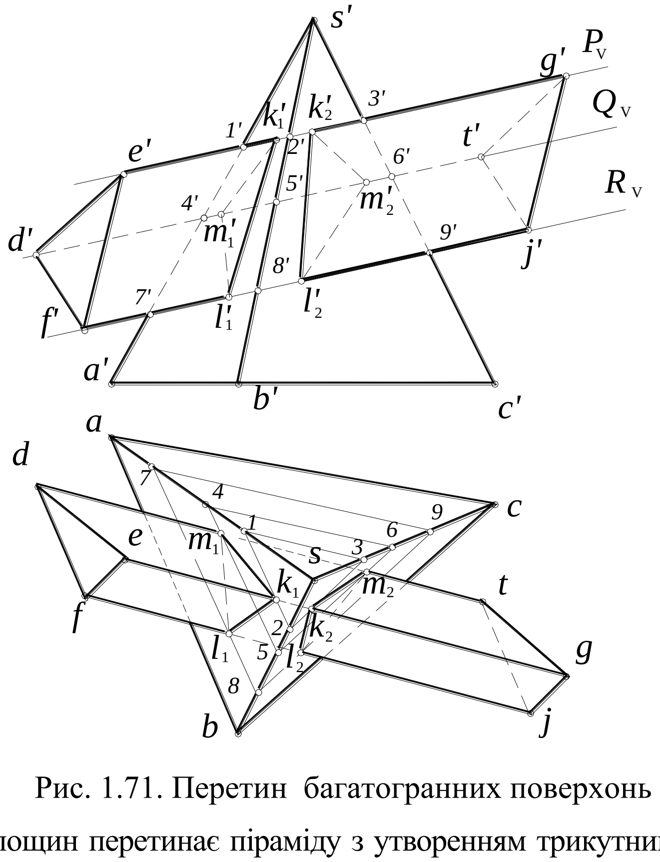


Рис. 1.71. Перетин багатогранних поверхонь

Кожна з цих площин перетинає піраміду з утворенням трикутника і точки лінії перетину будуть визначатися на перетині цього трикутника з ребром призми. Наприклад, фронтальнопроеціюоча площина P_V перетинає піраміду з утворенням трикутника *1, 2, 3*. Тоді горизонтальні проекції k_1 і k_2 точок перетину K_1 і K_2 піраміди ребром призми $E-G$ будуть знаходитися на перетині горизонтальної проекції $1, 2, 3$ трикутника з горизонтальною проекцією $e - g$ ребра $E - G$, а фронтальні проекції k'_1 і k'_2 цих точок можна знайти, використовуючи вертикальні лінії проекційного зв'язку.

Аналогічно визначають точки L_1, L_2, M_1, M_2 лінії перетину призми з пірамідою. З'єднавши одержані точки, мають дві гілки лінії перетину.

Оскільки усі відрізки, які складають вітки лінії перетину, належать як граням призми, так і граням піраміди, то їх видимість визначається видимістю цих граней. Так, на горизонтальній площині усі грані піраміди видимі, а із грані призми невидима тільки одна – $DTJF$. Тому на горизонтальній площині проекцій невидимі будуть тільки відрізки $l_1 - m_1$ і $l_2 - m_2$, які належать лінії перетину.

На фронтальній площині проекцій видимими є дві грані піраміди – ASB і BSC, і одна грань призми – $FEGJ$. Тому видимими будуть тільки відрізки $K_1 - L_1$ і $K_2 - L_2$, які належать цій грані призми.

12.2. Перетин багатогранних і кривих поверхонь

Для побудови лінії перетину поверхонь застосовують спосіб допоміжних січних площин або поверхонь, суть якого можна виразити таким чином:

а) задані поверхні перетинають третьою допоміжною поверхнею або площиною;

б) будують лінії перетину допоміжної поверхні або площини з кожною заданою поверхнею;

в) визначають точки перетину знайдених ліній, ці точки і є шуканими точками лінії перетину поверхонь.

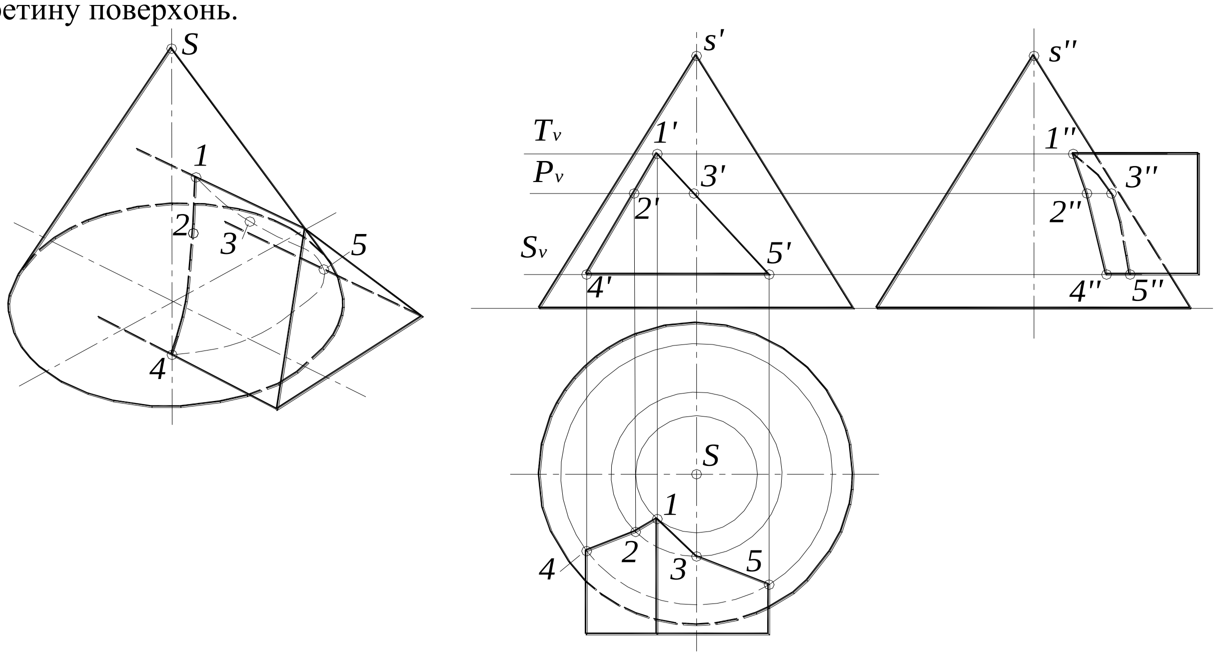


Рис. 1.72. Перетин кривої поверхні з багатогранником

Допоміжну площину розміщують у такому положенні, щоб при перетині її з поверхнями одержати прості лінії перетину – прямі або кола. Розрізняють опорні й випадкові точки лінії перетину. Спочатку визначають опорні точки: найвищі й найнижчі, крайні праві та ліві, точки видимості (точки дотику до контурів проекцій); що дає можливість визначити межу, в якій потрібно проводити допоміжні січні площини для визначення випадкових точок, що належать лінії перетину (рис. 1.72).

Поверхня багатогранника є сукупністю площин і прямих ліній. Тому задачі на перетин кривої поверхні з багатогранником можуть бути віднесені до задач на перетин кривої поверхні з площиною і з прямою лінією. Ці задачі розв'язуються за допомогою допоміжних січних площин (рис. 1.72). При перетині поверхні обертання з багатогранником одержують одну або дві лінії, які складаються з ділянок кривих другого порядку (кола, еліпса, параболи тощо) або прямих.

13.1. Перетин поверхонь обертання

При перетині двох поверхонь обертання одержують одну або дві просторові плавні криві.

Для побудови лінії взаємного перетину застосовуються такі способи:

а) спосіб допоміжних січних площин;

б) спосіб допоміжних січних сфер.

Спосіб допоміжних січних площин полягає у перетині обох поверхонь сімейством площин.

У першу чергу визначають опорні точки лінії перетину *(А* і *В)*, а потім випадкові (рис. 1.73). Простішою формою перетину конуса і сфери є кола, які одержують при розсіканні допоміжними січними площинами горизонтального рівня. Будують лінії перетину (кола радіусів *r* і *R*) допоміжних площин з кожною поверхнею окремо. Перетин одержаних ліній дає шукані точки лінії взаємного перетину поверхонь.

Одержані точки з'єднують уздовж лекала, враховуючи видимість відносно площин проекцій. Видимими будуть ті точки, які одержані при перетині видимих ліній. У точці *2* зміниться видимість відносно горизонтальної площини проекцій *Н*, оскільки вона знаходиться на екваторі сфери.

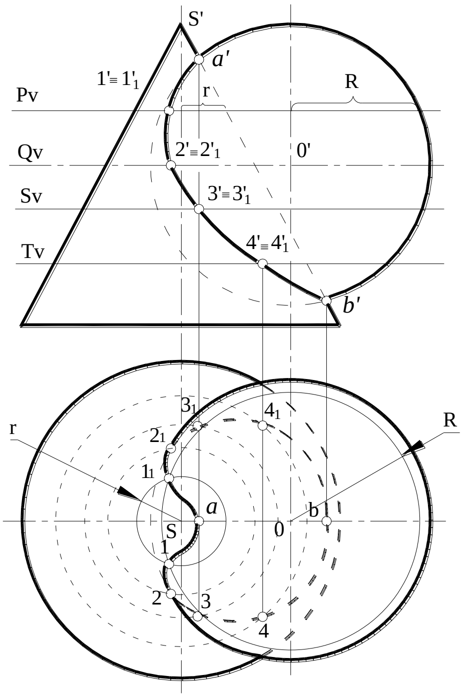


Рис. 1.73. Побудова лінії перетину конуса і сфери

Спосіб допоміжних січних сфер застосовують у тому випадку, якщо неможливо застосувати спосіб січних площин. Спосіб оснований на тому, що центр січної сфери знаходиться на осі поверхні обертання й одержані при перетині криві являють собою кола, які проекціюються на площину, паралельну осі поверхні, у вигляді відрізків прямих (рис. 1.74).

Спосіб допоміжних січних сфер застосовують тільки при виконанні таких умов:

1. Обидві поверхні повинні бути поверхнями обертання.
2. Осі поверхонь повинні перетинатись між собою і бути паралельними одній із площин проекцій.

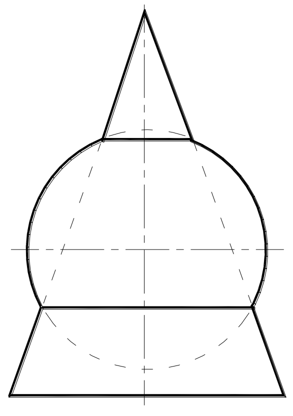


Рис. 1.74. Обґрунтування способу січних сфер

Сфери можуть бути побудовані таким чином:

а) з одного центра (*концентричні сфери*);

б) з різних центрів (*ексцентричні сфери*).

Побудову лінії взаємного перетину способом концентричних сфер, центр яких розташований у точці *О* перетину осей обох поверхонь (рис. 1.75), виконують у такому порядку:

1. Будують ряд концентричних сфер із центром у точці *О* перетину поверхонь обертання. При цьому радіус найбільшої сфери R_{max} дорівнює *0'1'* , тобто відстані до найбільш віддаленої точки перетину заданих поверхонь, а радіус найме-

ншої сфери R_{min} – радіусу сфери, яка може бути вписана в поверхню обертання більшого (відносно точки O) радіуса.

2. Допоміжні сфери перетинають кожну із заданих поверхонь з утворенням колами, які проеціюються на одну з площин проекцій у вигляді відрізків прямих (наприклад: $1'-1'_1$, $1'-1'_2$).

3. Точки перетину *1, 2, 3...* кожної пари кіл, які утворені перетином обох заданих поверхонь сферою, знаходяться на шуканій кривій лінії взаємного перетину.

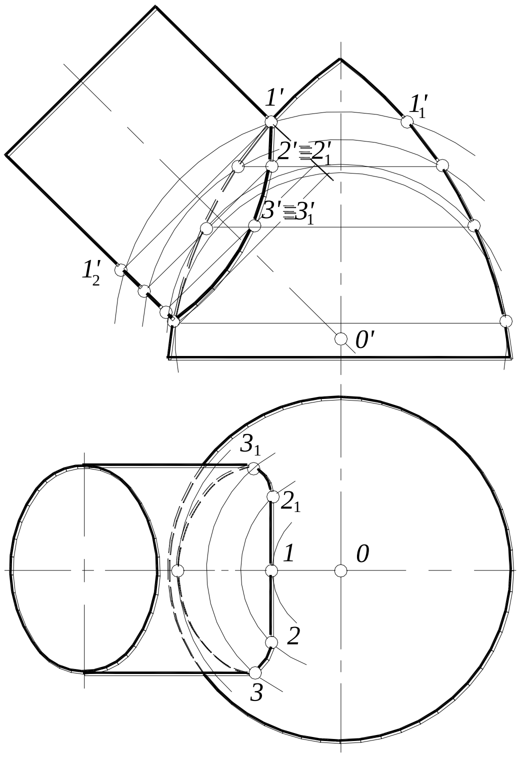


Рис. 1.75. Побудова лінії перетину кривих поверхонь способом концентричних сфер

ЛЕКЦІЯ № 14 (Вариант 1).

Тема: Аксонометричні проекції. Прямокутна ізометрія та диметрія.

14.1. Загальні положення і визначення

Звичайний проекційний рисунок просторового об`єкту (деталі, будови, підземні конструкції і т. д.) при достатній кількості зображень і розмірів несе в собі всі відомості для розуміння його форми і побудови. Але кожне зображення такого рисунка має тільки два виміри і тому його наглядність недостатня. Для швидкого та безпомилкового розуміння складних форм деталі поряд з такими рисунками виконують більш наглядні зображення – аксонометричні, які мають виміри в трьох напрямках.

Аксонометричними проекціями називають наглядні зображення предмета, одержані паралельним проеціюванням його на одну, картинну площину проекцій разом з координатними вісями, до яких відносять зображуваний предмет.

Якщо проеціюючі промені перпендикулярні до картинної площини, то аксонометрія називається прямокутною, якщо не перпендикулярні - то косокутною Ми розглянемо лише. прямокутну аксонометрію, тому що вона найчастіше використовується для побудови технічних рисунків.

Розглянемо побудову аксонометрії окремої точки, бо всі предмети – це сукупність визначиним чином розташованих точок Побудуємо аксонометрію точки *A*, епюр якої приведений на рис.1.76,*a*. Прив`яжемо точку до координатних вісей, які співпадають

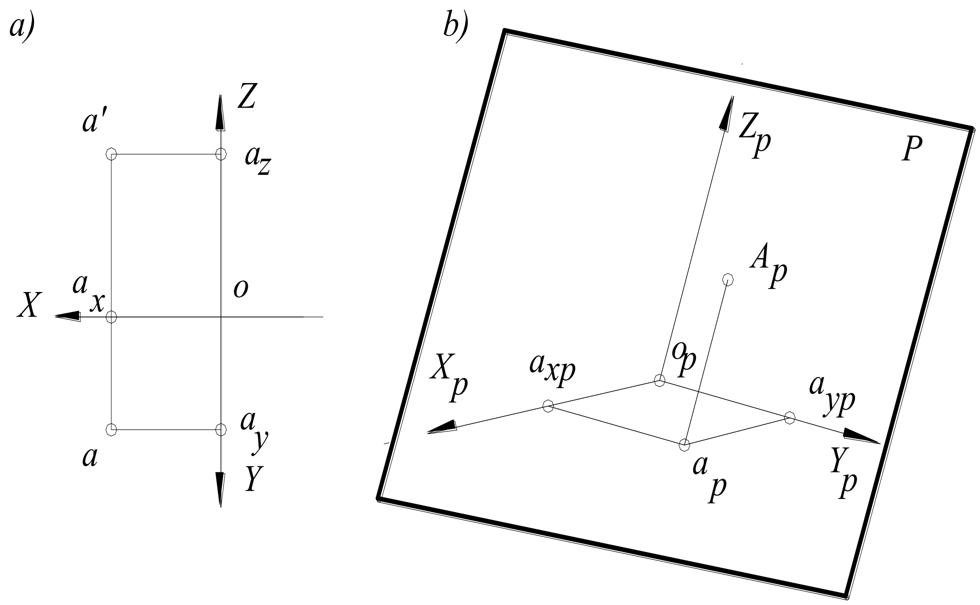


Рис.1.76. Аксонометрія точки

з вісями системи площин проекцій. Положення точки *A* визначається координатами *X,Y* і Z. Числові значення цих координат визначаються, відповідно, відрізками oa_x, oa_y і oa_z на вісях координат. Зпроеціюємо точку *A* і систему коорди- нат *OXYZ* на деяку довільно розташовану відносно *OXYZ* картинну площину *P* Проекції вісей системи координат займуть на картинній площині деяке положення. O_p X_P $У_P$ Z_P. (Рис.1.76,*b*).

Відрізки oa_x , oa_y , oa_z також розташуються на проекціях відповідних вісей, але їх проекції oa_{xp} ,oa_{yp}, oa_{zp} будуть спотворені,так як вони не паралельні картинній площині.

Величина спотворення характеризується показником спотворення. Показник спотворення визначається відношенням величини проекції відрізка на вісі, до його натуральної величини. В загальному випадку для кожної вісі існує свій показник спотворення. Позначемо показник спотворення відрізків паралельних вісі *OX* через *к*, паралельних вісі *OY* – через *m* і паралельних вісі *OZ* - через *n*. Якщо будемо знати величини проекцій відрізків по яких вимірюються координати точки, то зможемо побудувати і її аксонометричну проекцію і, зрозуміло, аксонометрію цілого об`єкту. На рис.1.76,*b* трьохланкова ламана лінія $O_pa_{xp}a_pA$ складена з відрізків , які визначають відповідні координати точки *A* з урахуванням показників спотворення по вісям.

Для випадку, коли показники спотворення для всіх вісей рівні $(к = m = n)$ аксонометричні проекції називаються *ізометричними, диметричними,* якщо показники однакові лише для двох вісей($к = n$) і *триметричними,* якщо всі показники спотворення різні($k \neq m \neq n$).

14.2. Прямокутна ізометрія

В детальному розгляді теорії аксонометричних побудов показано, що для будь-якої аксонометрії завжди $k^2+m^2+n^2=2$; Для ізометрії можна записати: $3m^2=2$; $m=n=k=0,82$. Отже, в ізометрії всі відрізки,що знаходяться на вісях координат або їм паралельні мають показник спотворення *0,82*. Це, так званий, теоретичний показник. На практиці його округляють до *1,0* і називають *зведеним показником спотворення*. Користування зведеним показником значно спрощує побудову ізометричних проекцій предметів простору.

В ізометрії проекції координатних вісей, які часто називають ізометричними вісями, розташовуються під кутами 120° одна до іншої.

Для побудови таких вісей (рис.1.77) на вертикальній прямій, по якій направимо вісь *OZ,* помітимо точку *O* і приймемо її за початок аксонометричних вісей. З точки *O* довільним радіусом *R* проведемо дугу, на якій з точки *1*, не змінюючи розхилу циркуля, зробимо засічки (точки 2 і 3). З`єднаємо точки *2* і *3* з точкою *O*. Це будуть ізометричні вісі *OX* і *OY*. Після побудови вісей допоміжні лінії необхідно видалити.

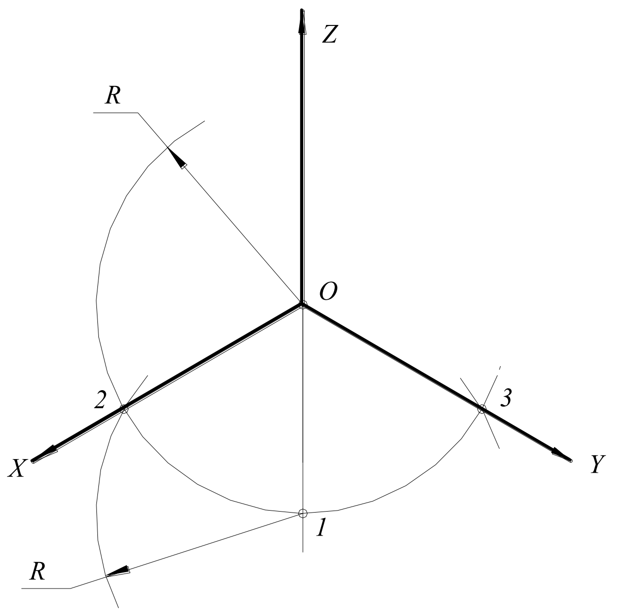


Рис.1.77. Побудова ізометричних вісей прямокутника *ABCD*.

14.3. Прямокутна диметрія

Для прямокутної диметрії $k=m\neq n$ На практиці приймають $k=m$,$n=0,5k$. Як і в ізометрії $k^2+m^2+n^2=2$; $2k^2+(0,5k)^2=2$; $k=0,94$. Отже, $k=0,94$; $m=0,94$; $n=0,47$. Це теоретичні значення показників спотворення по вісям. На практиці приймають: $k=1,0$; $m=1,0$; $n=0,5$.

Координатні вісі, які в диметрії називаються диметричними, на картинній площині розташовуються так, як показано на рис.1.76. Вісь *OX* складає з горизонтальною лінією кут в 7°10',а вісь *OY* – 42°25'. З цього ж рисунку легко зрозуміти і спосіб простої побудови диметричних вісей.

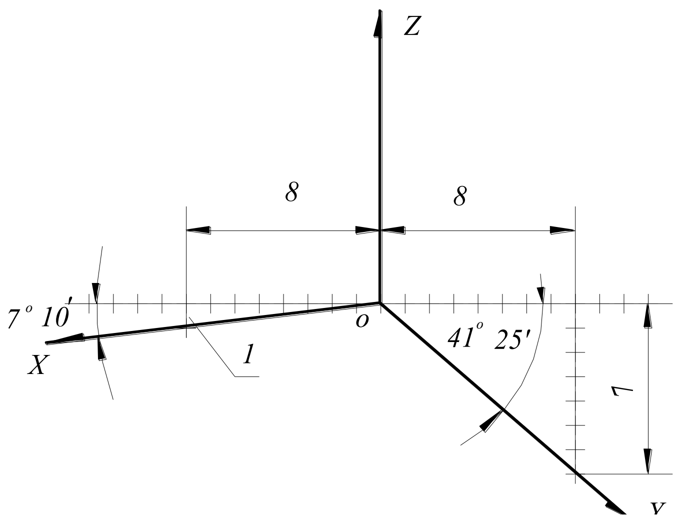


Рис.1.76. Побудова диметричних вісей

Точка в диметрії будується як і в ізометрії, але координата *Y* на диметричному зображенні дорівнює половині її дійсного значення.

14.4. Побудова кола в аксонометрії

В прямокутній аксонометрії коло, площина якого не паралельна картинній площині, зображується у вигляді еліпса. Розглянемо випадок, який часто зустрічається на практиці: побудова аксонометрії кіл, розташованих в координатних площинах або в площинах їм паралельних. Теоретично доведено, що в ізометрії велика вісь еліпса для вказаних вище випадків з урахуванням показника спотворення дорівнює 1,22 діаметра зображуваного кола, а мала – 0,7 діаметра.

В любій аксонометрії велика вісь еліпса завжди розташована перпендикулярно до тієї аксонометричної вісі, .яка відсутня в площині з зображуваним колом. Мала вісь перпендикулярна до великої.

На практиці еліпс заміняють овалом. Овал можна побудувати, користуючись одним із способів, відомих із розділу "Геометричне креслення". Для визначення розмірів великої і малої осей еліпса використовують кутовий масштаб (рис. 1.77, *б*). Якщо довжина катета *AB* дорівнює *1,0* одиниці, то вертикальні катети відповідно – *BD =0, 7* одиниць і *BC = 1,2* одиниць. *AC* – лінія, за допомогою якої визначають ВВЕ, а *AD* – лінія, за допомогою якої визначають величину малої осі еліпса. Якщо відкласти на *AB* розмір, який дорівнює радіусу заданого кола, то одержані вертикальні катети будуть дорівнювати відповідно *(ВВЕ)/2* і *(МВЕ)/2*.

Наприклад: необхідно побудувати аксонометричну проекцію кола з діаметром *d*, яке розташоване в горизонтальній площині проекцій (рис. 1.77, *а*).

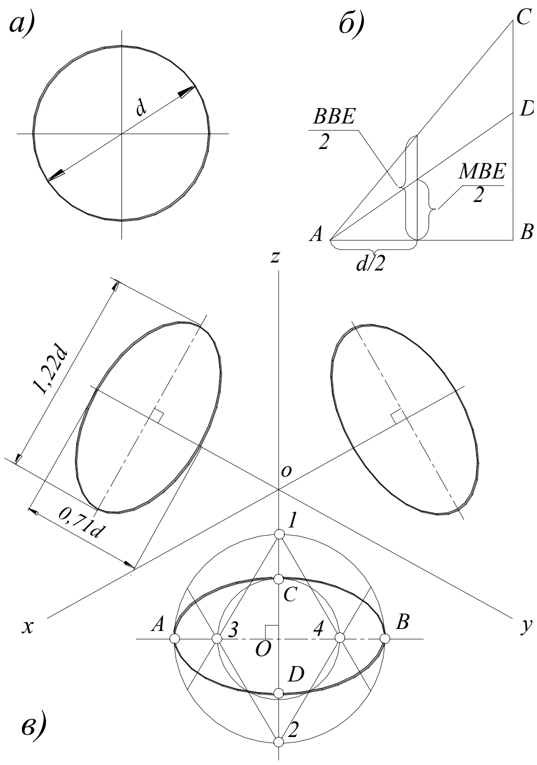


Рис. 1.77. Зображення кола в ізометрії

Через точку *O* аксонометричних осей проводять дві взаємно перпендикулярні прямі (рис. 1.77, *в*). Із точки *O* викреслюють коло радіусом, який дорівнює половині великої осі еліпса (овалу). У місцях перетину цього кола з вертикальною віссю визначаються два центри (*1* і *2*) овалу. Інші два центри (*3* і *4*) визначають на горизонтальній лінії кресленням дуги кола, радіус якого дорівнює половині малої осі овалу. Із центрів *1* і *2* проводять промені через центри *3* і *4*. На цих променях будуть розташовані точки спряження дуг кіл з радіусами $R = 1D = 2C$ і $r = 3A = 4B$.

При кресленні овалів, які розташовані у фронтальній і профільній площинах проекцій, потрібно виконати такі самі побудови, тільки великі осі овалів необхідно провести перпендикулярно до осі *y* для фронтальної площини проекцій і перпендикулярно до осі *x* для профільної площини проекцій (рис. 1.77, *в*). В диметрії для кіл, розташованих паралельно координатним площинам *XOY* і *YOZ*,велика вісь еліпса дорівнює 1,06 діаметра кола, мала – 0,35 діаметра, для кола, розташованого в вплощині паралельній координатній площині *XOY* або в ній самій, велика вісь еліпса дорівнює 1,06 діаметра кола,мала – 0,94 діаметра.

У прямокутній диметрії коло проеціюється у два види еліпса – "широкий" і "вузький", великі осі яких завжди перпендикулярні відсутній осі в ортогональній системі площин проекцій (рис. 1.78).

Якщо коло розташоване в площині, паралельній фронтальній площині проекцій або належить фронтальній площині проекцій, то воно проеціюється у "широкий" еліпс. В інших випадках коло проеціюється у "вузький" еліпс.

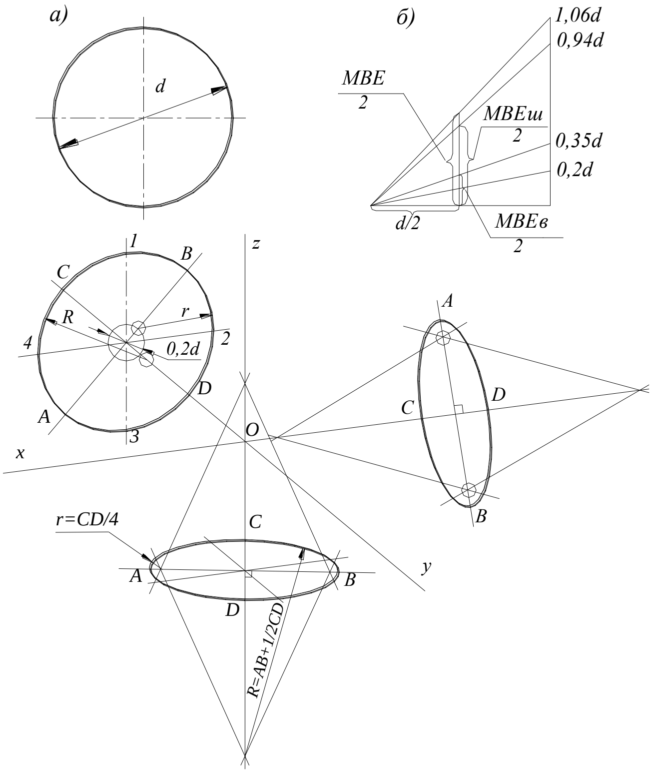


Рис. 1.78. Зображення кола у диметрії

При використанні приведених коефіцієнтів деформації велику вісь еліпса потрібно збільшити у 1/0,94 = 1,06 раза. Для кола, яке розташоване в площинах проекцій *XOZ*, велика вісь еліпса дорівнює 1,06*d*, а мала – 0,94*d*. Для кола, яке розташоване в площинах, паралельних площинам проекцій *XOY* і *YOZ*, велика вісь еліпса дорівнює 1,06*d*, а мала – 0,35*d* (де *d* – діаметр кола).

Як уже було сказано раніше, еліпси заміняються овалами, побудова яких приведена на рис. 1.78. Визначення розмірів великої та малої осей можна також робити за допомогою пропорційного масштабу (рис. 1.78, *б*).

14.5. Побудова ізометрії тіла

Розглянемо приклад на побудову ізометричної проекції просторового тіла,

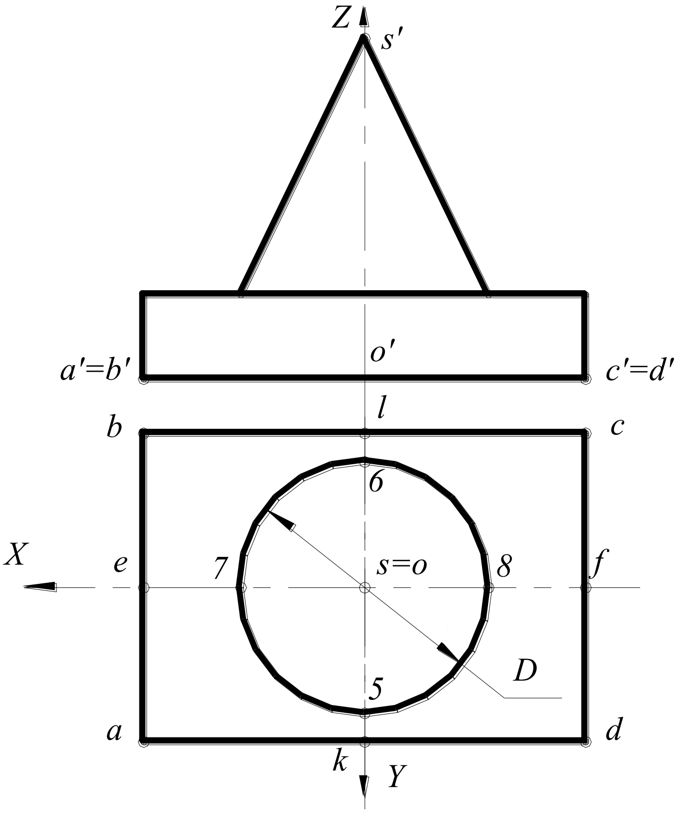


Рис.1.79. Приклад для побудови ізометрії просторового об'єкту

заданого на рис.1.79. Спочатку виберемо координатну систему, з якою жорстко буде зв`язане задане тіло. Якщо заданий об`єкт має вісі симетрії, як в нашому випадку, то бажано, щоб координатні вісі *OX*,*OY* і *OZ* співпадали з ними. Початок системи координат вибираємо в точці *O*. Після проекції предмета разом з координатною системою *OXYZ* на картинну площину в ізометрії координатні вісі розташуються під кутами 120^{o} одна до іншої.

Побудову ізометрії тіла (рис.1.80) розпочинаємо з побудови нижньої основи –

Якщо виміряти на епюрі координати вершин прямокутника, то, відклавши їх без спотворення (відрізки, що знаходяться на вісях мають зведений показник спотворення 1,0) на ізометричних вісях, побудуємо ці вершини в ізометрії. Але,не відступаючи від принципа побудови точок по координатам,можливо діяти іншим чином. Відкладемо на ізометричній вісі *OX* координату *X* точок *E* і *F*. Через ці точки проводимо прямі паралельні вісі *OY* Це будуть напрямки для сторін *AB* і *CD.*

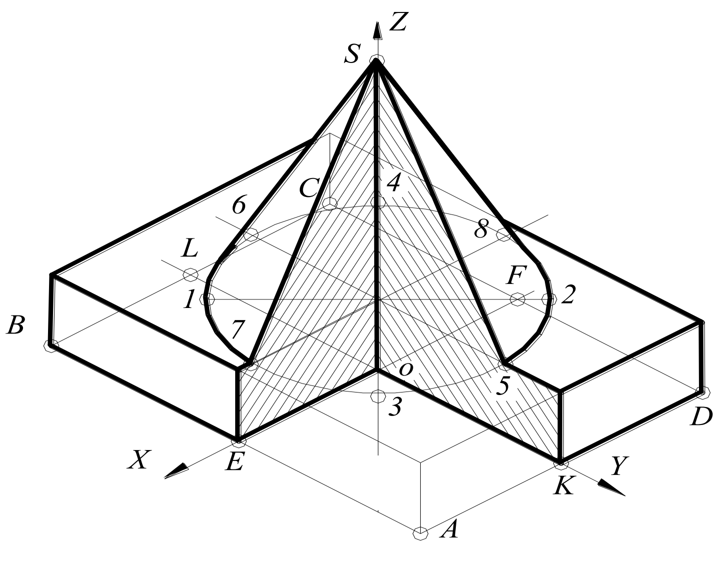


Рис.1.80. Ізометрія тіла

Сторони *AB* і *CD* на епюрі паралель ні вісі *OY.* Такими вони залишаться і в ізометрії. Далі на вісі *OY* відкладемо координату *Y* точок *К* і *L* і через них проведемо прямі,паралельні вісі *OX.* Проведені прямі, перетинаючись, дають вершини *A,B,C* і *D.* Піднявшись по вісі *OZ* на висоту призми,на якій стоїть конус, аналогічно будуємо верхню основу призми. Але можлива й інша побудова верхньої основи: з кожної вершини нижньої основи проводимо прямі (ребра призми), паралельні вісі *OZ.* Їх довжина дорівнює координаті *Z* верхньої основи. З`єднавши кінці,проведених відрізків, одержуємо верхню основу.

На верхній основі призми побудуємо еліпс, в який перетвориться коло основи конуса при його проеціюванні на картинну площину. Зображуване коло знаходиться в площині,паралельній координатній площині *XOY*, а тому велика вісь еліпса розташується перпендикулярно до *OZ*, а мала – перпендикулярно до великої вісі. Величина великої вісі 12 дорівнює *1,22* діаметра, а малої 34 – *0,7* діаметра кола.

Для визначення величин вісей еліпса скористаємося співвідношеннями катетів подібних прямокутних трикутників. Побудуємо прямий кут (рис.1.81) і на його горизонтальному катеті відкладемо 10 довільних, але рівних відрізків, на вертикальному катеті відкладемо таких 12 відрізків. Побудуємо дві гіпотенузи, як показано на рисунку. В одержаних трикутниках співвідношення між вертикальними і відповідними їм горизонтальними катетами дорівнює *1,2* і *0,7.* Але ж це коефіцієнти для визначення великої і малої вісей еліпса. Якщо відкласти відрізок *AB* рівний радіусу кола і провести катет *BD,* то в трикутниках *ABC* і *ABD* збережуться приведені вище співвідношення. Тому катет *BD*, рівний *1,2R*, буде велика піввісь еліпса, катет *BC*, рівний *0,7R* – мала піввісь еліпса.

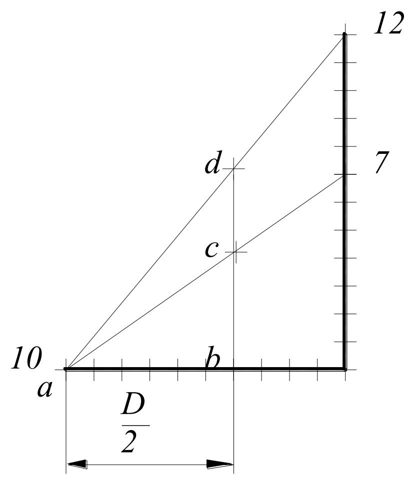


Рис.1.81. Трикутники для визначення вісей еліпсів

Існує декілька способівпобудови еліпса по його великій і малій вісям. Побудуємо еліпс по точках, як лекальну криву.

Спочатку будуємо велику і малу вісі і одержуємо точки 1,2,3 і 4. На ізометричних вісях відкладаємо без спотворення радіус кола і помічаємо точки 5,6,7 і 8. З`єднуємо одержані точки плавною кривою з допомогою лекала. Відклавши на вісі *OZ* від точки O_1 висоту конуса, знаходимо його вершину *S,* з якої проводимо твірні, дотичні до еліпса. Побудова ізометрії заданого тіла завершена,але часто виконують ще розрізи тіла координатними площинами, як це показано на рисунку. В розрізах обов`язково наноситься штриховка. Нахил ліній штриховки вибирають слідуючим чином: на ізометричних вісях від точки *O* відкладають довільні, але рівні відрізки і з`єднують їх кінці. Сторони одержаного трикутника визначають напрямок ліній штриховки для відповідних розрізів. Слід зазначити, що після закінчення побудови потрібно видалити з зображення невидимі та допоміжні лінії. На нашому рисунку цього не зроблено заради розуміння порядку всіх побудов.

При побудові диметричної проекції предмета координати точок відкладають з урахуванням диметричних зведених показників спотворення. В іншому всі побудови аналогічні побудові ізометрії.

ЛІТЕРАТУРА

1. ГордонВ.О.,Семенцов-Огиевский М. А.Курс начертательной геометрии. М., “Наука”, 1963.-366с.
2. Додатко О.І. Нарисна геометрія: Навч. посібник. – Д.: НГА України, 2003. – 119 с.
3. Додатко О.І., Дудко М.О., Назаренко В.О. Нарисна геометрія у прикладах і задачах: Навч. посібник. – Вид. 3-є, допов. і виправл; За ред. О.І. Додатка. – Д.: НГУ, 2003. – 124 с.
4. Додатко О.І. Інженерна графіка: Навч. посібник. – Вид. 3-є, допов. і виправл. – Д.: НГУ, 2006. – 181 с.
5. Локтев О.В., Числов П.А. Задачник по начертательной геометрии / Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1984.
6. Ломоносов Г.Г., Инженерная графика: Учебник для вузов. – М.: Недра. – 287 с.
7. Михайленко В. Е., Пономарев А.М. Инженерная графика: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища шк., 1985. – 295 с.
8. Михайленко В. Е., Ванін В.В., Ковальов С.М. Інженерна та комп’ютерна графіка: підруч. для студ. вищих закл. освіти / За редакцією В. Е. Михайленка. – К.: 2003. – 344 с.
9. Михайленко В. Е. та ін. Збірник задач з інженерної та комп’ютерної графіки: Навч. посібник. – К.: Вища шк., 2003. – 159 с.: іл.
10. Прерис А.М., Бубырь Ю.В., Павленко А.В. и др. Начертательная геометрия и черчение. Инженерная графика. Методические указания по курсу и контрольные задания для студентов инженерно-технических специальностей (кроме строительных) заочной формы обучения. – Х.: УЗПИ, 1986. – 151 с.
11. Рудаев А.К. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: Физматгиз, 1962. – 283 с.
12. Рускевич Н.Л. и др. Сборник задач по начертательной геометрии. – К.: Вища шк., 1973. – 311 с.
13. Справочник по инженерной графике / Потишко А.В., Крушевская Д.П.; Под ред. А.В. Потишко. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Будівельник, 1983. – 264 с.
14. Чалый А.Т. Курс начертательной геометрии. – М.: Машиностроение, 1964. – 279 с.
15. Короев Ю.И. Начртательная геометрия. М., Стройиздат, 1987-319с.
16. Хаскин А. М. Черчение. К., “ Вища школа” , 1974-444с.